

*Notas de Aula, Mini-curso*

# Métodos Dinâmicos e Numéricos Aplicados ao Estudo do Ciclo Econômico Brasileiro\*

Victor Gomes

*Universidade Católica de Brasília*

victor@pos.ucb.br

Programa de Pós-Graduação em Economia

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

14 à 17 de outubro de 2003

## 1 Introdução

Estas notas são introdutórias, construídas sobre exemplos, e podem ser vistas como um material suplementar aos capítulos selecionados de Ljungqvist e Sargent (2000), Uhlig (1999) e Cooley e Prescott (1995).

## 2 Calibragem

O processo chamado de calibragem têm tradição em economia.<sup>1</sup> Ele é usado largamente nos modelos conhecidos como equilíbrio geral computável aplicado à finanças públicas e comércio internacional (ex: Shoven e Whaley, 1984 e Auerbach e Kotlikoff, 1988). Calibragem é um estratégia para encontrar valores numéricos para os parâmetros das economias artificiais. O uso de modelos “calibrados” cresceu muito a partir de meados dos anos oitenta. Especialmente após o artigo seminal de Kydland e Prescott (1982).

Calibragem usa a teoria econômica extensivamente como a base para restringir um modelo genérico e aplicá-lo ao estudo de uma realidade determinada. Como é o uso da teoria e qual o papel dos dados? O princípio da identificação é usar a teoria econômica para se extrair o melhor conjunto de informação dos dados. Calibragem adota claramente esta idéia, mas também a de que a relação entre teoria e mensuração não unidirecional. Na abordagem de calibragem, a mensuração é usada para dar conteúdo à teoria;

---

\*Versão 1.0. Como esta é a primeira versão ficaram muitos 'typos'. Comentários e sugestões são bem vindos.

<sup>1</sup>O começo desta seção é baseado em Cooley (1997).

em contrapartida, a teoria nos ajuda a focar em que medir e como medir. Portanto, esta relação entre teoria e mensuração distingue a abordagem de calibragem da abordagem econométrica usual.

Podemos pensar em calibragem da seguintes forma. Recorde o teorema Sonnenschein-Mantel-Debreu, o seu resultado (aproximadamente) diz que para qualquer dado conjunto de preços e alocações (funções excesso de demanda para a economia com dotações) deverá existir uma economia (representada por um conjunto de preferências e tecnologia) com algum número de consumidores para os quais estes preços são preços de equilíbrio e as alocações são alocações de equilíbrio a estes preços.<sup>2</sup> A implicação é que a noção de equilíbrio competitivo walrasiano não é restrita, isto é, o teorema diz que deverá sempre existir alguma teoria de equilíbrio que explica qualquer conjunto de resultados observados. Sendo possível se explicar qualquer coisa é o mesmo que não ter teoria de nada.

Como se pode suplantar este problema? A resposta é que devemos impor algumas restrições sobre as teorias a serem utilizadas. Isto significa que devemos impor algumas restrições sobre as preferências e tecnologias que utilizaremos na construção de modelos. Desta forma, calibragem é um procedimento que restringe o mapeamento entre equilíbrio competitivo e as observações, tal que o equilíbrio mostre certas propriedades. Por exemplo, para muitas das aplicações na teoria do ciclo econômico, as propriedades que impomos são aquelas associadas com o crescimento balanceado. A razão básica para isto é que os pesquisadores sabem que a maioria das economias modernas mostram características do crescimento balanceado. Uma vez que tanto o crescimento quanto a flutuação são características das séries de todas as economias, poderia ser sugerido uma teoria em que os dois fenômenos são intimamente relacionados. Isto sugere que não devemos separar modelos para crescimento e para flutuações.

Restringindo o mapeamento do equilíbrio competitivo aos dados, nos habilita a computar o equilíbrio de modelos que apresentam certas propriedades observadas. Neste contexto, computando o equilíbrio significa resolver problemas de otimização que as famílias e as firmas encontram e determinar a trajetória de equilíbrio do consumo, investimento, produto e horas para este modelo. A economia-modelo ou economia artificial irá apresentar as propriedades de acordo com os parâmetros calibrados e com as formas funcionais escolhidas. Por outro lado, o modelo não poderá nos ajudar a entender os fatos que são usados para calibrar o modelo. *Portanto, o resultado de um exercício de calibragem é a resposta para a questão que a economia-modelo foi desenhada para responder.* Finalmente, estes modelos costumam apresentar outras propriedades além daquelas desejadas para responder a principal questão colocada pelo pesquisador. Estas características ‘excedentes’ são um bonus que podem nos ajudar a escolher entre modelos

---

<sup>2</sup>Veja por exemplo Mas-Colell, Whinston e Green (1995), seção 17.E.

desenhados para responder a mesma questão.

Uma vez que é possível computar o equilíbrio destas economias e estudá-las, na prática estamos criando um laboratório onde podemos procurar por respostas a questões bem definidas. A esperança é que as respostas tragam informações sobre as economias reais que são caracterizadas pelas propriedades prescritas pelo modelo. Avanços na matemática e particularmente nos métodos numéricos, combinado com um dramático declínio no custo de computação (em tempo e dinheiro), tem tornado possível construir modelos que são cada vez mais ricos em suas características, e usam elas como laboratórios para endereçar um grande espectro de questões importantes.

## 2.1 Sete Regras e Dois Princípios para Calibragem

As regras são baseadas em Cooley (1997) e os princípios em Prescott (1998).

**Regra 1** *Não justificar a escolha de parâmetros pela referência a estudos anteriores.*

**Regra 2** *Honrar a teoria econômica.* Um ambiente econômico junto com uma definição de equilíbrio, define uma *abordagem teórica* que pode ser usada para responder questões sobre o comportamento da economia no mundo real. Diferentes questões podem requerer alterações na abordagem que podem tomar a forma de mudanças no ambiente econômico e/ou mudanças no conceito de equilíbrio.

**Regra 3** *Respeitar as mensurações.* Devemos restringir uma abordagem teórica com observações sobre a realidade e com mais teoria econômica. O primeiro passo em qualquer modelo ‘calibrado’ é restringir o equilíbrio a uma classe de parâmetros. Por exemplo, desejamos fazer com que o modelo de crescimento neoclássico seja consistente com as observações de longo prazo da economia. Para realizar isto é necessário usar a teoria econômica e algumas observações.

**Regra 4** *Adequar os dados ao modelo.* Uma parte importante do processo de calibragem é alinhar a abordagem teórica empregada com as observações da economia real. Com teoria suficiente e observações para definir uma classe paramétrica de modelos, podemos estabelecer a correspondência entre esta classe de modelos e os dados de uma economia. Estabelecer esta correspondência pode requerer que reorganizemos os dados medidos para a economia de forma que estes sejam consistentes com classe de modelo utilizada.

**Regra 5** *Adequar o modelo aos dados.* Existem algumas características nos dados que não podemos abstrair quando usamos um modelo calibrado. O procedimento geral é determinar valores aos parâmetros tal que o comportamento do modelo descreva o comportamento real em várias

dimensões. Observamos ao longo do tempo que certas razões nas economias se mostram razoavelmente constantes ao longo do tempo. Isto sugere que devemos escolher parâmetros para os modelos que reproduzam estas dimensões de crescimento de longo prazo da economia real.

**Regra 6** *Não proliferar parâmetros livres.* Existem diversas formas de se acrescentar mais detalhes ao modelo neoclássico de crescimento, como por exemplo, descrições mais ricas do mercado de trabalho, introdução de moeda, o papel do governo e da política fiscal, etc. Usualmente podemos adicionar estes detalhes a uma nova questão ou para melhorar a resposta obtida com um modelo mais simples. Alguns pesquisadores adicionam detalhes simplesmente para ter um modelo mais próximo da economia real. Isto em geral ocorre pela adição de parâmetros livres: isto é, mais parâmetros garantem uma melhor aproximação da economia artificial com a real. Um princípio de boa calibragem é que não devemos adicionar parâmetros sem ter questão particular em mente e sem possuir uma maneira adequada de determinar valores aquele parâmetro.

**Regra 7** *Calibração e estimação são complementares e não substitutos.*

### 3 Dados Reais – Fatos

Nosso objeto de estudo neste caso é o ciclo econômico. Portanto devemos definir o que o ciclo e quais os fatos observados.

#### 3.1 Os Ciclos Econômicos

Como definimos o ciclo econômico? Esta é a principal pergunta sobre o nosso objeto de estudo, ou seja, o que queremos estudar?

A definição moderna de ciclo é dada por Lucas (1980) (que é bem próxima a de Burns e Mitchell, 1946), que argumenta que os ciclos podem ser considerados como desvios do produto em relação a sua tendência. Nas economias desenvolvidas é fácil observar que o produto tende a flutuar em torno da trajetória de crescimento da economia.

Para Kydland e Prescott, o que guia o conceito de uma tendência é o estado estacionário da teoria do crescimento (modelo Cass-Koopmans). Neste modelo, o estado estacionário é caracterizado pela taxa de crescimento igual entre o produto per capita, consumo, investimento, estoque de capital e o salário real. A parte de tempo produtivo alocado para as atividades de mercado permanece constante, bem como o retorno real do capital.

Se a taxa de crescimento tecnológico permanece constante, então a tendência do logaritmo do produto real deve ser uma função linear do tempo. Todavia,

a taxa de crescimento varia no tempo e entre países (como mostramos na seção anterior para o caso brasileiro).

Qualquer definição de componentes e tendência é necessariamente estatística. Assim, uma decomposição é uma representação dos dados e ela será útil, se a luz da teoria, ela revelar algum padrão de comportamento importante.

### 3.1.1 O Filtro H-P

Kydland e Prescott argumentam que a sua seleção de uma definição de tendência foi guiada pelos seguintes critérios: (i) o componente de tendência deve ser aproximadamente uma curva que estudiosos do ciclo poderiam traçar sobre a figura de uma série de tempo; (ii) a tendência de uma dada série de tempo deve ser a sua transformação linear e ela deve ser a mesma para todas as séries; (iii) a determinação do tamanho da amostra não deve alterar o valor dos desvios para uma certa data, com a exceção das informações contidas no começo e no fim da amostra (veja Baxter e King, 1999, para uma avaliação); e, (iv) este esquema deve ser bem definido, de julgamento livre e facilmente reproduzível.

Tendo em mente estes princípios, Hodrick e Prescott (1997 – a primeira versão do artigo data de 1980) desenvolveram um filtro para séries de tempo, que atualmente é largamente utilizado na literatura de ciclos. O filtro Hodrick Prescott (comumente denominado de filtro H-P) é uma adaptação do método Whittaker-Henderson tipo A, muito utilizado em ciências atuariais (Hodrick e Prescott, 1997, p. 3). Para descrever o procedimento do filtro podemos interpretar uma série de tempo,  $y_t$ , como a soma de um componente cíclico,  $y_t^c$ , e um componente de crescimento,  $y_t^g$ . Faça  $\lambda$  ser o parâmetro que reflete a variância relativa do componente de crescimento em relação ao cíclico. Portanto, dado um valor para  $\lambda$ , o problema da filtragem é escolher o componente de longo prazo,  $y_t^g$ , que minimiza a seguinte função de perda:

$$\sum_{t=1}^T (y_t^c)^2 + \lambda \sum_{t=1}^T [(y_{t+1}^g - y_t^g) - (y_t^g - y_{t-1}^g)]^2 \quad (1)$$

Para  $\lambda = 0$  o componente de crescimento é simplesmente igual à série. Quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , o componente de crescimento aproxima-se de uma tendência linear. Na escolha do valor deste parâmetro existe muita controvérsia, pois não existe uma definição clara de qual valor deve ser utilizado. Por exemplo, para séries trimestrais foi escolhido  $\lambda = 1600$  por convenção. Cooley e Prescott (1995, p. 27), argumentam que a motivação por trás desta escolha é que se a série original for estacionária, então o filtro H-P com esta escolha de  $\lambda$  deve eliminar flutuações a frequências menores do que trinta e dois trimestres, ou oito anos.

Todavia, para séries anuais não há consenso sobre o valor deste parâmetro.

Por exemplo, para séries anuais, Backus e Kehoe (1992) usam 100, enquanto Hassler, Lundvik, Persson e Soderlind (1994) usam 10 e Englund, Persson e Svensson (1992) usam 400. Neste caso, a escolha do parâmetro se baseia em critérios demasiadamente subjetivos. Portanto, como não há um consenso em torno deste parâmetro, nós usamos  $\lambda = 100$ , cujo valor foi utilizado por Backus e Kehoe (1992) para um estudo de comparação internacional e por Ellery, Gomes e Sachsida (2002) para a economia brasileira.

## 3.2 Os Fatos do Ciclo

### 3.2.1 Estados Unidos

O ciclo econômico é definido como um conjunto de estatísticas do comportamento recursivo da economia em torno da sua tendência. O filtro H-P é capaz de retirar a tendência, ou seja, podemos separar a tendência do componente de curto prazo. O papel exercido pelo filtro H-P fica explícito pela inspeção visual da Figura 1 em que mostramos o log do produto real trimestral per capita da economia americana de 1947 a 2003 e a sua tendência obtida a partir do uso do filtro H-P ( $\lambda = 1600$ ).<sup>3</sup> Como pode ser notado, o componente de crescimento do filtro H-P segue de perto a série original produzindo uma tendência que se ajusta a movimentos mais longos do ciclo.

Como Kydland e Prescott (1990) argumentam, a idéia do filtro H-P é a de traçar uma tendência que os pesquisadores de crescimento pudessem identificar facilmente. Na Figura 8 apresentamos o componente do ciclo extraído pelo filtro H-P. Na prática, com o filtro H-P calculamos o ciclo e a tendência que mostramos na Figura anterior pode ser obtida como resíduo entre a série do produto real e do seu ciclo.

### 3.2.2 Brasil

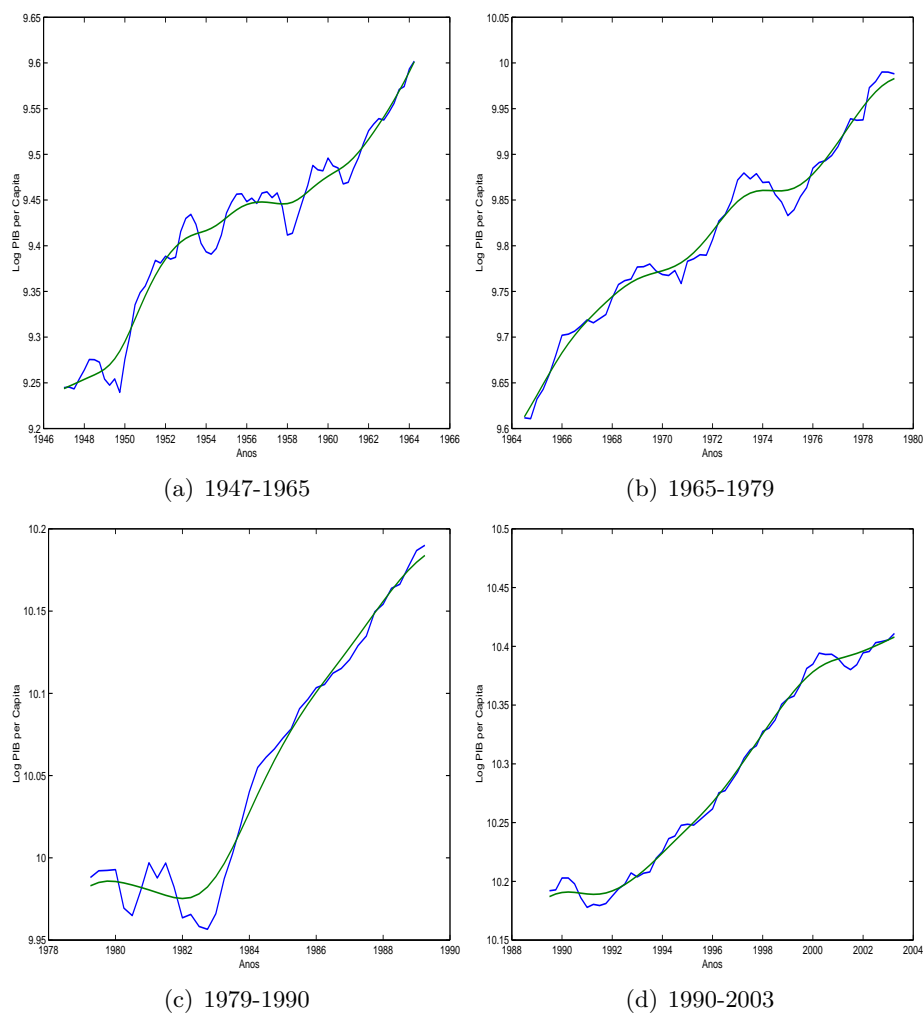
Os fatos do ciclo econômico podem ser representados por um conjunto de estatísticas das séries filtradas pelo filtro H-P. Em geral descrevemos a amplitude das flutuações das variáveis agregadas como forma de descrever a sua magnitude relativa. Também medimos a correlação das variáveis agregadas com o produto real para capturar a extensão com que as variáveis são pró-cíclicas (positivamente correlacionadas) ou contra-cíclicas (negativamente correlacionadas). Além disso também é medido a auto-correlação durante todo o período para saber se a variável em questão se movimenta à frente ou depois do ciclo do produto (lead and lag indicators).

Na Figura 3 apresentamos o ciclo do PNB brasileiro anual obtido com o filtro H-P, para o período de 1947 à 1998. Na Tabela 1 apresentamos as estatísticas do ciclo econômico brasileiro para o período de 1970 à 1998. A seleção da variáveis está baseada no modelo básico de ciclos reais, isto é,

---

<sup>3</sup>Dados do PIB e da população são do BEA ([www.bea.doc.gov](http://www.bea.doc.gov)).

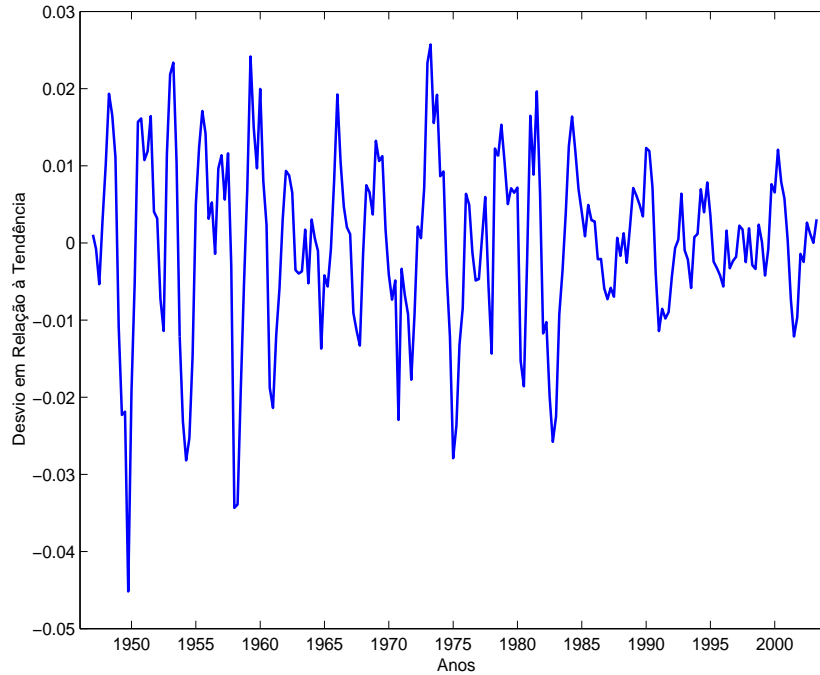
Figura 1: Log do PIB Real per Capita e a sua Tendência (1996 US\$), 1947:1-2003:2



apenas olhamos para os fatos do ciclo do produto e dos componentes que fazem parte do modelo de crescimento econômico básico, como por exemplo, consumo, investimento, capital e horas trabalhadas.

Para comparar fatos e dados devemos fazer alguns ajustes nas séries macroeconômicas tal que os dados estejam adequados às informações do modelo. Deste modo vamos utilizar um pouco mais de teoria econômica para elaborar e selecionar as séries. A primeira restrição é a de que usamos, em geral, um ambiente que a economia é fechada, ou seja, o nosso agente representativo não realiza transações comerciais com o resto do mundo. Portanto, a medida adequada de produto é o PNB, pois este é líquido do saldo

Figura 2: Ciclo Econômico dos EUA obtido com o Filtro H-P



da renda enviada ao exterior. A segunda restrição é a de que os agentes devem consumir os seus bens num único período. O que é armazenado ou que se torna estoque é o investimento que contribui com a acumulação de capital. Portanto, todos os bens consumidos que podem ser somados ao estoque de capital devem ser somados ao investimento. Este é o caso do consumo de bens duráveis que é adicionado ao investimento. Por outro lado, o consumo passa a ser apenas o consumo de bens não-duráveis e de serviços.

Para comparar os fatos reais com os fatos das simulações selecionais algumas estatísticas do ciclo. Elas são:

- Desvio-padrão do produto e das demais variáveis – volatilidade;
- Correlação com o produto: direta, defasada e forward – co-movimento dos componentes do produto e dos insumos;
- Funções de impulso-resposta (VAR bi-variado) – persistência e propagação dos choques.

A idéia de se usar as funções de impulso-resposta é a de saber se a série artificial consegue gerar o mesmo espectro do ciclo observado. Ou seja, para este caso bastaria apenas comparar o espectro da série real com a série artificial. Esta seria uma alternativa ao uso da função-impulso resposta.

Figura 3: Ciclo Econômico do Brasil obtido com o Filtro H-P

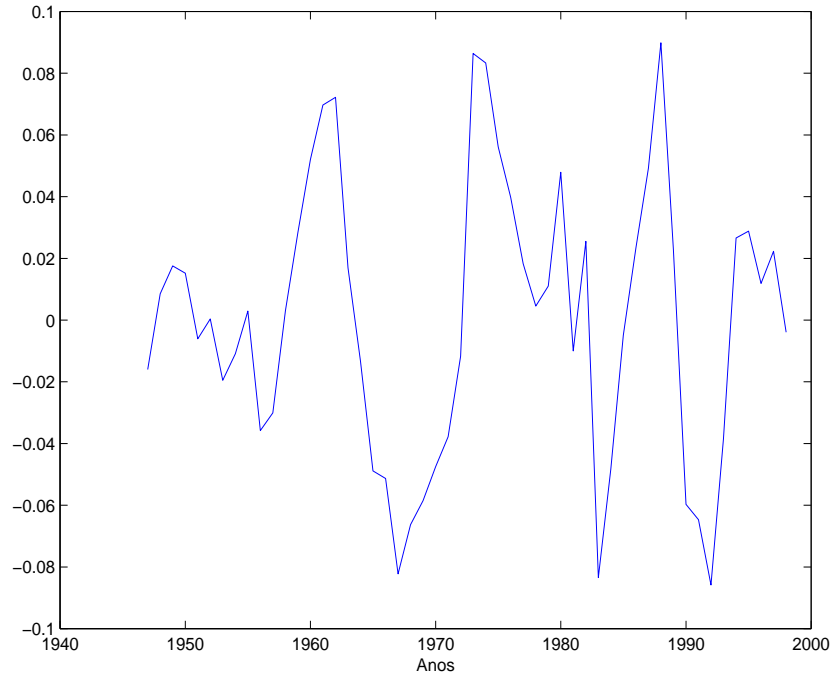


Tabela 1: Comportamento cíclico da economia brasileira, 1970-1998

Variáveis ( $x$ )	Correlações				
	$DP\%$	$DP_x/DP_y$	$(x_{-1}, PNB)$	$(x, PNB)$	$(x_{+1}, PNB)$
Produto (=y)	5.48	1.00	0.5765	1.0000	0.5765
Consumo <sup>c</sup>	5.17	0.94	0.5408	0.7739	0.3029
Investimento <sup>d</sup>	9.47	1.72	0.3818	0.9047	0.7138
Horas <sup>a</sup>	7.15	1.30	0.3844	0.6996	0.4513
Horas <sup>b</sup>	5.57	1.03	0.0766	0.5376	0.5965
Produtividade <sup>a</sup>	5.11	0.93	-0.0365	-0.0075	-0.1276
Produtividade <sup>b</sup>	5.27	0.97	0.5092	0.4542	0.1838

**Notas:**

<sup>a</sup> Série de Horas da FIESP, 1975-1998.

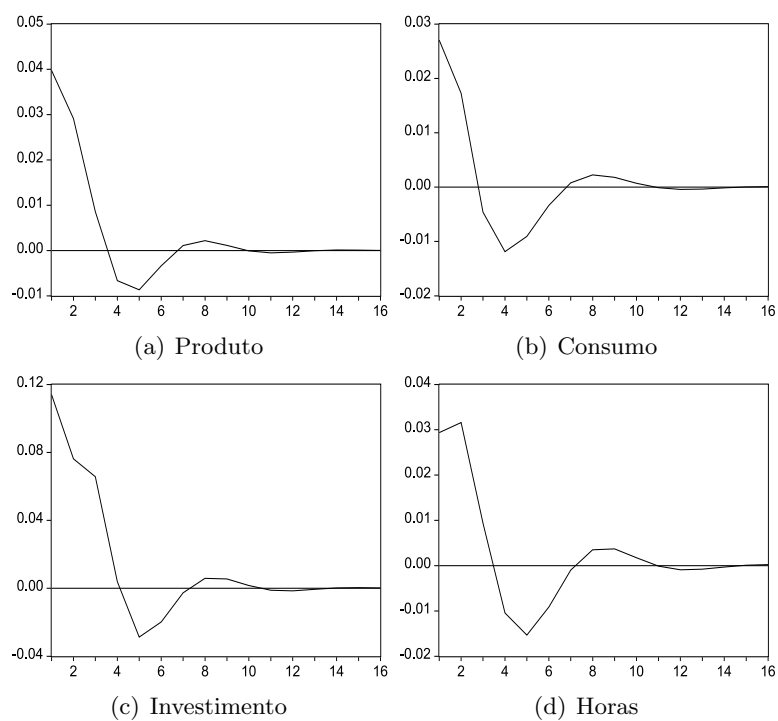
<sup>b</sup> Série de Horas da PIM, 1985-1998

<sup>c</sup> Consumo = consumo de bens não-duráveis e serviços, veja Ellery, Gomes e Sachsida (2002).

<sup>d</sup> Investimento = formação bruta de capita fixo, consumo de bens duráveis e variação de estoques, veja Ellery, Gomes e Sachsida (2002).

Na Tabela 1 mostramos as estatísticas selecionadas do ciclo econômico brasileiro para o período de 1970 a 1998, com séries anuais. Na Figura 4

Figura 4: Funções de impulso-resposta – choque de um desvio-padrão do PNB



mostramos as funções de impulso-resposta do PNB, consumo, investimento e horas trabalhadas (1970-1998) geradas por um choque de um desvio-padrão do PNB, a partir de um VAR bi-variado.

## 4 Definição do Equilíbrio

Definição de equilíbrio de um modelo estocástico de crescimento.

**Definição (Equilíbrio):** Um equilíbrio recursivo para esta economia consiste em uma função valor  $V(z, k, K)$ ; um conjunto de regras de decisão:  $c(z, k, K)$ ,  $h(z, k, K)$  e  $i(z, k, K)$ ; um conjunto de decisões agregadas:  $C(z, K)$ ,  $H(z, K)$  e  $I(z, K)$ ; e preços de fatores  $w(z, K)$  e  $r(z, K)$ , tais que estas funções satisfaçam:

1. o programa dinâmico das famílias, (??):

$$V(k, z) = \max_{\{h, k'\}} \{u(c, 1 - h) + \beta(1 + \eta)EV(k', z')\}$$

sujeito a restrição orçamentária (??), dados a lei de movimento do estoque de capital (??), a lei de movimento do choque tecnológico (??), e  $k_0$ .

2. o comportamento ótimo das firmas, (??)
3. a consistência entre as regras agregadas e individuais, ou seja,  $Nc(z, k, K) = C(z, K)$ ;  $Nh(z, k, K) = H(z, K)$  e  $Ni(z, k, K) = I(z, K)$ , onde  $N$  representa o número de indivíduos ou, de forma mais precisa,  $N$  representa a medida do conjunto de indivíduos.
4. a restrição agregada de recursos:

$$C(z, K) + I(z, K) = Y(z, K)$$

## 5 Modelo

O nosso caso base será o modelo de crescimento neoclássico com trabalho indivisível de Hansen (1985). Aqui usamos uma versão ligeiramente modificada do modelo original, exatamente como descrita por Uhlig (1999, p. 49), para facilitar a leitura e o entedimento do procedimento e do código de simulação numérica.

Aqui a determinação do modelo já envolve procedimentos de calibragem. Já apresentamos uma escolha prévia da função utilidade e da função de produção, isto é, estamos calibrando as preferências e a tecnologia. Veja a seção 2 para mais detalhes sobre calibragem.

$$\max_{\{C_t, I_t, N_t\}_{t=1}^{\infty}} E \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \{\log C_t - AN_t\} \quad (2)$$

tal que

$$C_t + I_t \leq Y_t \quad (3)$$

$$K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + I_t \quad (4)$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\theta N_t^{1-\theta} \quad (5)$$

$$\log Z_t = (1 - \psi) \log \bar{Z} + \psi \log Z_{t-1} + e_t \quad (6)$$

as variáveis e parâmetros são listados na tabela 2.

Tabela 2: Lista das Variáveis e Parâmetros do Modelo de Trabalho Indivisível

<i>Variáveis</i>	
$t$	tempo
$C$	consumo
$I$	investimento
$Y$	produto
$K$	capital
$N$	horas de trabalho
$Z$	choque de produtividade
<i>Parâmetros</i>	
$\beta$	taxa de desconto intertemporal
$\delta$	taxa de depreciação
$A$	parâmetro de desutilidade do trabalho
$\theta$	participação do capital
$\psi$	persistência do choque de produtividade

## 6 Calibragem do Modelo

Agora iremos calibrar uma economia específica, no caso o modelo de trabalho indivisível. Como notamos anteriormente, quando calibramos estamos apenas querendo restringir o modelo com dados sobre a economia real.

### 6.1 Os fatos...

**Participação do capital** Um dos fatos estilizados mais regulares para a economia americana a participação do capital na renda nacional (veja Gollin, 2002). Em geral para os EUA é consumo modelar a participação do capital na renda nacional como algo entre .4 e .35. Isto implica que a participação do trabalho é um número entre .6 e .65 (veja Cooley e Prescott, 1995).

Para o Brasil, Gomes, Bugarin e Ellery (2002) e Gomes, Lisboa e Pessoa (2002) encontraram números entre .67 e .65 para a participação do trabalho na renda nacional.

**Tempo de mercado** Uma outra regularidade encontrada para a economia americana e para a economia brasileira é o tempo total dedicado as atividades de mercado. Em ambos os casos encontramos que as pessoas dedicam em média 1/3 de seu tempo total disponível para as atividades de mercado. Para os Estados Unidos, a referência clássica e o texto de Ghez e Becker (1975). Um ponto importante aqui é quanto consideramos ser o tempo total disponível. Ou seja, podemos considerar 24h ou algum número mais civilizado como 24h menos o tempo necessário para cuidados pessoais e para o sono, algo em torno de 18 ou 20h por dia. Dependendo desta definição o tempo dedicado a atividade de mercado pode aumentar um pouco. Este é o caso da calibração de Parente e Prescott (2000), que usam .4 ao invés de .33.

Para o Brasil estes números são verdadeiros também. Se usarmos os dados da PNAD e dos Censos podemos observar que as pessoas dedicam entre .33 e .4 de tempo para as suas atividades de mercado, dependendo da definição de tempo disponível para as atividades de mercado. Estes números foram calculados e usados por Ellery, Gomes e Sachsida (2002) e Bugarin et all (2002).

**Relação capital/produto** A estabilidade da relação capital produto é um dos fatos estilizados do crescimento econômico de Kaldor (1957). Além disso a estabilidade da relação capital-produto é uma característica compatível com o conceito de estado estacionário.

Todavia, para a economia brasileira a relação capital-produto não é estável, aumentado demasiadamente a partir de 1973 até 1990 (veja Gomes, Bugarin e Ellery, 2002).

## 6.2 ...E a consistência com o modelo

Suponha as condições de primeira ordem do modelo de trabalho indivisível em estado estacionário:

$$A = (1 - \theta) \frac{1}{N} \frac{Y}{C} \quad (7)$$

$$\beta = 1 / \left\{ \theta \frac{Y}{K} + 1 - \delta \right\} \quad (8)$$

E da lei de movimento do estoque de capital em estado estacionário, temos:

$$\delta = \frac{X}{K} = \frac{X}{Y} \frac{Y}{K}. \quad (9)$$

- De (7), com os dados de  $\theta$ , tempo médio de trabalho  $N$  e da média histórica de  $Y/C$ , temos o valor para  $A$ .
- De (9), com os dados históricos de  $\frac{X}{Y}$  e  $\frac{Y}{K}$ , teremos o valor consistente com o modelo da depreciação  $\delta$ .
- De (8), com os dados de  $\delta$ , da relação capital-produto e da participação do capital, temos o valor para o parâmetro  $\beta$ .

É comum encontrar na literatura calibrações que inputam o valor para  $\beta$  a partir da taxa de juros histórica de .04. Deste modo, pode-se usar  $\beta$  para encontrar o valor de estado estacionário do modelo para  $\theta$ ,  $K/Y$  ou  $\delta$ .

Vale notar que *cada modelo tem uma calibragem específica e nesse sentido, cada parâmetro calibrado pelo modelo diz respeito apenas àquele modelo.*

## 7 Solução Numérica

Para encontrar a solução numérica do modelo calibrado podemos adotar várias técnicas. Para uma visão das técnicas usadas em economia veja o livro de Judd (1999). Para aplicações de vários métodos descritos por Judd veja Marimon e Scott (1999).

### 7.1 Uhlig's Toolbox

#### 7.1.1 Solução Analítica e Log-linearização

Tome as condições de primeira ordem do modelo de trabalho indivisível:

$$\frac{1}{C_t} = \Lambda_t \quad (10)$$

$$A = \Lambda_t(1 - \theta) \frac{Y_t}{N_t} \quad (11)$$

$$R_t = \theta \frac{Y_t}{K_{t-1}} + 1 - \delta \quad (12)$$

$$Y_t = \bar{Z} e^{z_t} K_{t-1}^\theta N_t^{1-\theta} \quad (13)$$

$$C_t + K_t = Y_t + (1 - \delta)K_{t-1} \quad (14)$$

$$\Lambda_t = \beta E_t[\Lambda_{t+1} R_{t+1}] \quad (15)$$

$$\log Z_t = (1 - \psi) \log \bar{Z} + \psi \log Z_{t-1} + e_t \quad (16)$$

O princípio é usar uma aproximação de Taylor em torno do estado estacionário para alterar todas as equações por aproximações, que são funções lineares dos desvios logaritmos das variáveis. *É muito importante notar*

que os modelos linearizados são válidos apenas localmente. Em modelos estocásticos isto significa que as linearizações são válidas apenas para distúrbios estocásticos pequenos, que não fujam muito do estado estacionário (veja Sims, 2002).<sup>4</sup>

Assuma letras em minúsculo para representar o desvio logaritmo. Exemplo:

$$y_t = \log(Y_t) - \log(\bar{Y})$$

ou seja,

$$Y_t = \bar{Y} e^{y_t} \quad (17)$$

tal que  $\bar{Y}$  é o valor de estado estacionário do produto.

**Exemplo 1 (Função de produção)** *Log-linearização da função de produção (5),  $Y_t = Z_t K_{t-1}^\theta N_t^{1-\theta}$  (veja a seção A.2.2 para a linearização deste caso). Substitua a variável em nível pelo desvio-logaritmo, como em (17). Portanto a equação (5) pode ser reescrita da seguinte forma:*

$$\bar{Y} e^{y_t} = \bar{Z} e^{z_t} \bar{K}^\theta e^{\theta k_{t-1}} \bar{N}^{1-\theta} e^{1-\theta n_t}$$

Como em estado estacionário  $\bar{Y} = \bar{Z} \bar{K}^\theta \bar{N}^{1-\theta}$ , podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$e^{y_t} = e^{z_t} e^{\theta k_{t-1}} e^{(1-\theta)n_t}$$

Aplicando logs em ambos os lados, resulta em

$$y_t = z_t + \theta k_{t-1} + (1 - \theta)n_t. \quad (18)$$

Neste caso não estamos realizando uma aproximação, é apenas uma versão log-linear da função de produção.

□

Outro exemplo de linearização pode ser aplicado para a restrição orçamentária, neste caso existem algumas diferenças em relação ao exemplo anterior.

**Exemplo 2 (Restrição orçamentária)** *A restrição orçamentária (3) pode ser modificada para:*

$$\bar{C} e^{c_t} + \bar{K} e^{k_t} = \bar{Y} e^{y_t} + (1 - \delta) \bar{K} e^{k_{t-1}}$$

Esta equação pode ser escrita aproximadamente como:

$$\bar{C}(1 + c_t) + \bar{K}(1 + k_t) = \bar{Y}(1 + y_t) + (1 - \delta) \bar{K}(1 + k_{t-1})$$

---

<sup>4</sup>Além desse problema, simulações da aproximação de primeira ordem de um modelo e a consequente computação de bem-estar médio a partir das simulações não costuma levar a rankings corretos entre políticas alternativas. De acordo com Sims (2002), para corrigir este problema é necessário uma expansão de Taylor maior do que a de primeira ordem.

Como  $\bar{C} + \delta\bar{K} = \bar{Y}$  devido a definição de estado estacionário, os termos constantes podem ser eliminados. Assim, obtemos:

$$\bar{C}c_t + \bar{K}k_t = \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1}$$

A restrição orçamentária é agora escrita em termos de desvios percentuais: os níveis de estado-estacionário nesta equação re-escalam os desvios percentuais para fazê-los comparáveis. Note que uma diferenciação explícita não é requerida para obter a versão log-linear da restrição orçamentária.  $\square$

Para a linearização das demais equações veja a seção A.2.3. Abaixo apresentamos todas as equações linearizadas:

$$-c_t = \lambda_t \quad (19)$$

$$n_t = y_t + \lambda_t \quad (20)$$

$$\bar{R}r_t = \theta \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(y_t - k_{t-1}) \quad (21)$$

$$y_t = z_t + \theta k_{t-1} + (1 - \delta)n_t \quad (22)$$

$$\bar{C}c_t + \bar{K}k_t = \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} \quad (23)$$

$$\lambda_t = E_t[\lambda_{t+1} + r_{t+1}] \quad (24)$$

$$Z_t = \psi Z_{t-1} + \epsilon_t \quad (25)$$

As equações são escritas tal que apenas aparecem variáveis datadas em  $t$ ,  $t - 1$  e expectativas na data  $t$  das variáveis em  $t + 1$ .

Estas equações formam um sistema de sete ‘equações diferenciais estocásticas de primeira ordem lineares’ em sete variáveis:  $y_t, k_t, n_t, c_t, r_t, Z_t, \lambda_t$ , dados valores para os parâmetros.

### 7.1.2 Solução

Para solucionar o modelo é adequado classificar todas as variáveis em três grupos:

$X_t$  é um vetor de  $m$  variáveis de estado endógenas (ou predeterminadas).

$Y_t$  é um vetor de  $n$  outras variáveis endógenas.

$Z_t$  é um vetor de  $k$  variáveis de estado exógenas.

Estrutura:

$$0 = \mathbf{A}X_t + \mathbf{B}X_{t-1} + \mathbf{C}Y_t + \mathbf{D}Z_t \quad (26)$$

$$0 = E_t[\mathbf{F}X_{t+1} + \mathbf{G}X_t + \mathbf{H}X_{t-1} + \mathbf{J}Y_{t+1} + \mathbf{K}Y_t + \mathbf{L}Z_{t+1} + \mathbf{M}Z_t] \quad (27)$$

$$Z_{t+1} = \mathbf{N}Z_t + e_{t+1} \quad (28)$$

A primeira equação é chamada de equação determinística; o número de equações determinísticas é  $l$ . A segunda é chamada de equação expectacional. A terceira é chamada de processo autoregressivo.

As seguintes condições devem ser encontradas:

1.  $\mathbf{C}$  deve ter o tamanho  $(l \times n)$  tal que  $n \leq l$ , e deve possuir o rank (posto)  $n$ .
2.  $\mathbf{F}$  deve ter a dimensão  $(m + n - l) \times m$ .
3.  $\mathbf{N}$  deve possuir apenas autovalores estáveis.

**Exemplo 3 (Matrizes do modelo de trabalho indivisível)** *Temos que reescrever o modelo log-linear em termos das equações (26), (27) e (28). Para o modelo de trabalho indivisível podemos escrever as matrizes apropriadas.*

*Ordene o sistema log-linear da seguinte forma:*

$$0 = -\bar{C}c_t + \bar{Y}y_t - \bar{I}i_t \quad (29)$$

$$0 = -\bar{K}k_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} + \bar{I}i_t \quad (30)$$

$$0 = \theta k_{t-1} - y_t + (1 - \theta)n_t + z_t \quad (31)$$

$$0 = -c_t + y_t - n_t \quad (32)$$

$$0 = -\theta(\bar{Y}/\bar{K})k_{t-1} + \theta(\bar{Y}/\bar{K})y_t - \bar{R}r_t \quad (33)$$

$$0 = E_t[-c_{t+1} + r_{t+1} + c_t] \quad (34)$$

$$z_{t+1} = \psi z_t + \epsilon_{t+1} \quad (35)$$

- *Variáveis de estado endógenas:*  $m = 1$ ;  $(k_t)$ ;
- *Variáveis de escolha ('outras variáveis endógenas'):*  $n = 5$ ;  $(c_t, y_t, n_t, r_t, i_t)$ ;<sup>5</sup>
- *Variáveis de estado exógenas:*  $k = 1$ ;  $(z_t)$ ;

*As matrizes que compõem a equação determinística (26) são as seguintes:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{K} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1 - \delta)\bar{K} \\ \theta \\ -\theta\frac{\bar{Y}}{\bar{K}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

<sup>5</sup>A ordem das variáveis deve ser mantida para se construir as matrizes.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\bar{C} & \bar{Y} & 0 & 0 & -\bar{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{I} \\ 0 & -1 & (1-\theta) & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta(\bar{Y}/\bar{K}) & 0 & -\bar{R} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes que compõem a equação expectacional (27) são as seguintes:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} = \mathbf{H} = \mathbf{L} = \mathbf{M} = [0]$$

$$\mathbf{J} = [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$\mathbf{K} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

E para a equação de movimento do choque de produtividade ou do processo autoregressivo (28):

$$\mathbf{N} = [\psi].$$

□

A solução pode ser caracterizada pelas seguintes leis de movimento recursivas de equilíbrio:

$$x_t = \mathbf{P}x_{t-1} + \mathbf{Q}z_t \quad (36)$$

$$y_t = \mathbf{R}x_{t-1} + \mathbf{S}z_t. \quad (37)$$

As matrizes  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ , e  $\mathbf{S}$  são a solução do sistema, tal que este equilíbrio seja estável.

### Algoritmo

Para entender o método de solução devemos ter conhecimento da seguinte definição.

**Definição 1 (Matriz pseudo-inversa)** A pseudo-inversa de uma matriz  $\mathbf{C}$  é a matriz  $\mathbf{C}^+$  satisfazendo  $\mathbf{C}^+\mathbf{C}\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^+$  e  $\mathbf{C}^+\mathbf{C}\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}$ .

Uma vez que assumimos que  $\text{posto}(\mathbf{C}) \geq n$ , obtemos  $\mathbf{C}^+ = (\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'$ .

A solução empregada por Uhlig (1999) é descrita no seguinte teorema.

**Teorema 1 (Solução do Equilíbrio Recursivo)** *Se existem leis de movimento de equilíbrio recursivas que são soluções das equações (26), (27) e (28), então as matrizes dos coeficientes podem ser encontradas como se segue. Faça  $C^+$  ser a pseudo-inversa de  $C$ . Faça  $C^0$  ser uma matriz  $(l-n) \times l$  cujas linhas formam a base para o espaço nulo de  $C'$ .<sup>6</sup>*

1.  $P$  satisfaz as equações quadráticas (matrizes)

$$0 = C^0 A P + C^0 B \quad (38)$$

$$0 = (F - J C^+ A) P^2 - (J C^+ B - G + K C^+ A) P - K C^+ B + H \quad (39)$$

*O equilíbrio descrito pelas leis de movimento de equilíbrio recursivo (26), (27) e (28) é estável se e somente se todos os autovalores de  $P$  são menores do que a unidade em valor absoluto.*

2.  $R$  é dada por

$$R = -C^+(A P + B)$$

Dado  $P$  e  $R$ , faça  $V$  ser a matriz

$$V = \begin{bmatrix} I_k \otimes A & I_k \otimes C \\ N' \otimes F + I_k \otimes (F P + J R + G) & N' \otimes J + I_k \otimes K \end{bmatrix}$$

onde  $I_k$  é a matriz identidade de tamanho  $k \times k$ . Então

$$V \begin{bmatrix} \text{vec}(Q) \\ \text{vec}(S) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \text{vec}(D) \\ \text{vec}(L N + M) \end{bmatrix} \quad (40)$$

onde 'vec' é um vetor coluna.

■

**Prova:** veja Uhlig (1999, p. 39).

**Colorário 1 (Solução do Equilíbrio Recursivo para  $l = n$ )** *Suponha que  $l = n$ , isto é, que o número de equações expectacionais é igual ao número de variáveis de estado endógenas. Se existem leis de movimento de equilíbrio recursivas que são soluções das equações (26), (27) e (28), então as matrizes dos coeficientes podem ser encontradas como se segue.*

1.  $P$  satisfaz as equações quadráticas (matrizes)

$$0 = (F - J C^{-1} A) P^2 - (J C^{-1} B - G + K C^{-1} A) P - K C^{-1} B + H \quad (41)$$

*O equilíbrio descrito pelas leis de movimento de equilíbrio recursivo (26), (27) e (28) é estável se e somente se todos os autovalores de  $P$  são menores do que a unidade em valor absoluto.*

---

<sup>6</sup> $C^0$  pode ser encontrada pela decomposição do valor singular de  $C'$ .

2.  $\mathbf{R}$  é dada por

$$\mathbf{R} = -\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}).$$

3.  $\mathbf{Q}$  satisfaz

$$\begin{aligned} & (\mathbf{N}' \otimes (\mathbf{F} - \mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}) + \mathbf{I}_k \otimes (\mathbf{J}\mathbf{R} + \mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{G} - \mathbf{K}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A})) \text{vec}(\mathbf{Q}) = \\ & = \text{vec}((\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{N} + \mathbf{K}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{M}) \quad (42) \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{I}_k$  é a matriz identidade de tamanho  $k \times k$ , sendo a matriz que necessita ser invertida nesta fórmula.

4.  $\mathbf{S}$  é dada por

$$\mathbf{S} = -\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{D}).$$

■

## 8 Dados Reais versus Dados Artificiais

Os resultados das simulações podem ser condensados nas seguintes leis de movimento do equilíbrio recursivo:

$$x_t = \mathbf{P}x_{t-1} + \mathbf{Q}z_t$$

$$y_t = \mathbf{R}x_{t-1} + \mathbf{S}z_t$$

$$z_t = \mathbf{N}z_{t-1} + \epsilon_t.$$

Estes resultados podem ser usados para examinar as implicações do modelo simulado. Uma vez que  $x_t$ ,  $y_t$ , e  $z_t$  são desvios-logaritmos, as matrizes  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{N}$  podem entendidas e interpretadas como tal (veja Campbell 1994).

Funções de impulso-resposta podem ser calculadas para um choque particular  $\epsilon_1$  determinando  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  e  $z_0 = 0$ , bem como  $\epsilon_t = 0$  para  $t \leq 2$ , e calculando recursivamente  $z_t$ . Além disso tomamos  $x_t$  e  $y_t$ , dado  $x_{t-1}$ ,  $y_{t-1}$ ,  $z_{t-1}$  e  $\epsilon_t$  para  $t = 1, \dots, T$  a partir da lei de movimento de equilíbrio recursivo e da lei de movimento para  $z_t$ .

Escreva um VAR na forma de vetor MA( $\infty$ ):

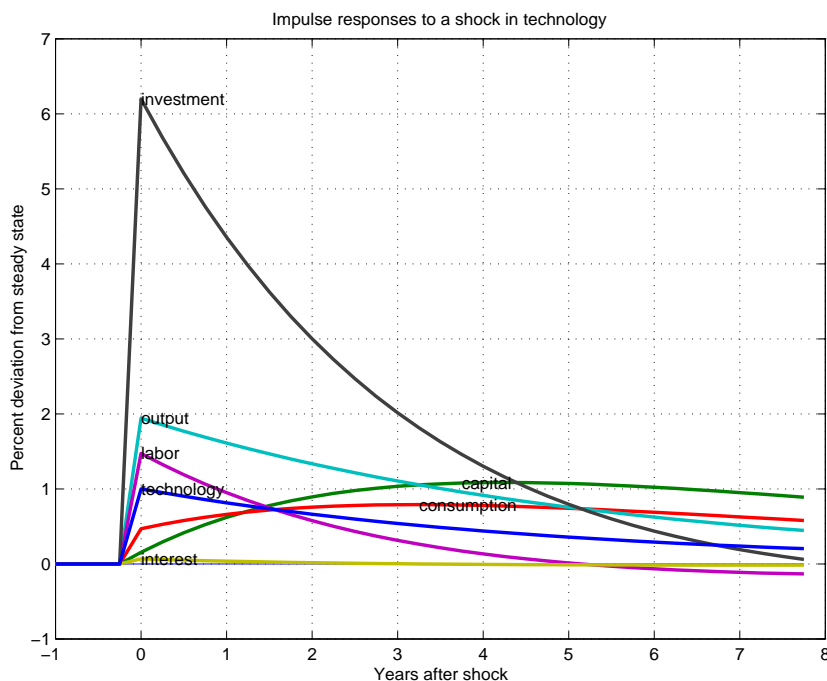
$$y_t = \mu + \epsilon_t + \Phi_1\epsilon_{t+1} + \Phi_2\epsilon_{t+2} + \dots$$

Deste modo, a matriz  $\Phi$  tem a seguinte interpretação:

$$\frac{\partial y_{t+s}}{\partial \epsilon'_t} = \Phi_s;$$

Veja Hamilton (1994, p. 318-9).

Figura 5: Função de impulso-resposta



## A Apêndices

### A.1 Otimização pelo Método de Lagrange

Veja Rust (2000) e Chow (1997).

#### A.1.1 O problema

Problema de programação dinâmica estocástico com horizonte infinito:

$$V(s) = \max_{\alpha} E_{\alpha} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(s_t, a_t) | s_0 = s \right\}, \quad (\text{A-1})$$

Representação *espaço de estado* da lei de movimento:

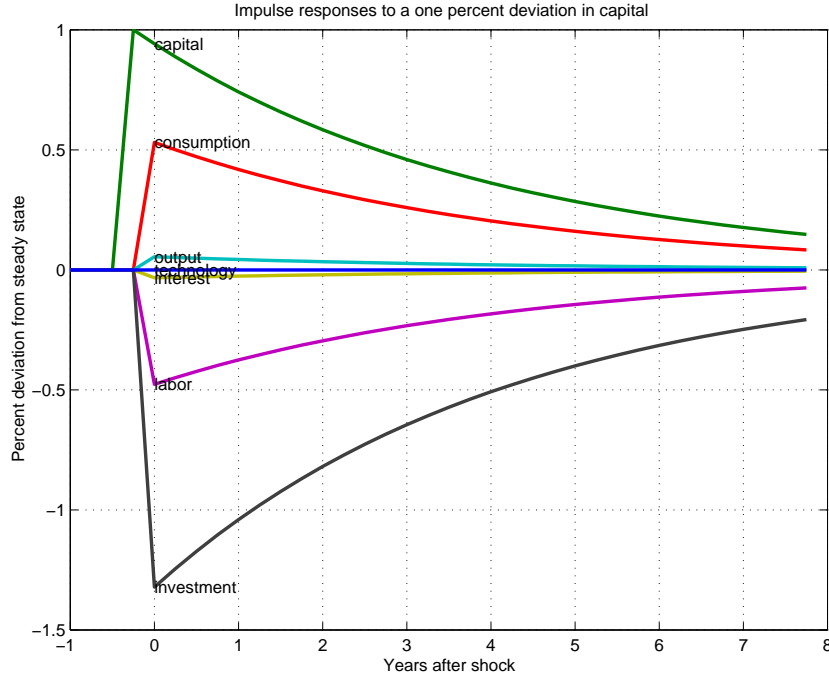
$$s_{t+1} = m(s_t, a_t) + \epsilon_t, \quad (\text{A-2})$$

tal que  $\{\epsilon_t\}$  é uma iid com densidade  $f(\epsilon)$ .

Relação com a formulação de probabilidade de transição:

$$p(s' | s, a) = f(s' - m(s, a)). \quad (\text{A-3})$$

Figura 6: Função de impulso-resposta



### A.1.2 Lagrangiano para o Problema de Programação Dinâmica

Introduza a sequência de multiplicadores de Lagrange  $\{\lambda_t\}$ , tal que  $\lambda_{t+1}$  é o multiplicador de Lagrange associado com a restrição na equação (A-2). O Lagrangiano será:

$$L = \max_{\{a_t\}, \{s_t\}} E \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(s_t, a_t) + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} [s_{t+1} - m(s_t, a_t) - \epsilon_t] \right\}. \quad (\text{A-4})$$

As condições de primeira ordem (CPO) são:

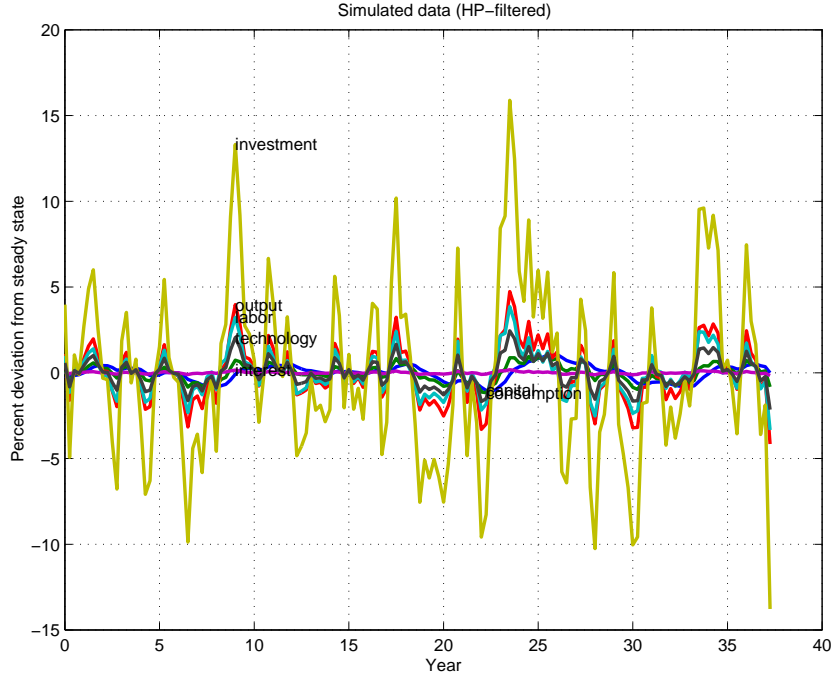
$$\frac{\partial L}{\partial a_t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial a_t}(s_t, a_t) - \beta \frac{\partial m}{\partial a_t}(s_t, a_t) E_t \{ \lambda_{t+1} \} = 0 \quad (\text{A-5})$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial s_t}(s_t, a_t) - \beta \frac{\partial m}{\partial s_t}(s_t, a_t) E_t \{ \lambda_{t+1} \} = \lambda_t \quad (\text{A-6})$$

O multiplicador de lagrange  $\lambda_t$  é uma função destas equações. Conjecture que  $\lambda_t = \lambda(s)$ .

- Neste caso as equações (A-5) e (A-6) serão um par de equações funcionais determinando as função não-conhecidas  $\{\lambda, \alpha\}$ .

Figura 7: Simulação



- Dado  $\alpha$  equação (A-6) é equivalente a uma *Equação Integral Fredholm de Segundo Tipo*:

$$\lambda(s) = \frac{\partial u}{\partial s}(s, \alpha(s)) - \beta \frac{\partial m}{\partial s}(s, \alpha(s)) \int \lambda(s') f(s' - m(s, \alpha(s))) ds'. \quad (\text{A-7})$$

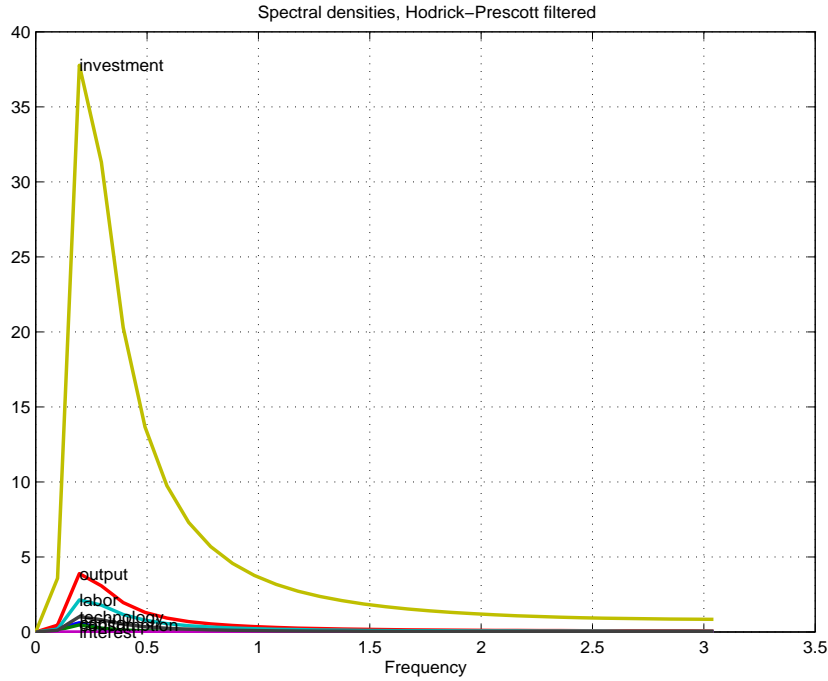
Use um método infinito-dimensional análogo ao *método de interação na função política* para resolver para  $\{\lambda, \alpha\}$ .

### A.1.3 Exemplo: modelo de trabalho indivisível

O Lagrangeano para o modelo de trabalho indivisível da seção 5 é o seguinte:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \log C_t - \Lambda_t [ Z_t K_{t-1}^\theta N_t^{1-\theta} + (1-\delta)K_{t-1} - C_t - K_t ] \}. \quad (\text{A-8})$$

Figura 8: Análise Espectral



## A.2 Log-linearização

O princípio da log-linearização é fazer uma aproximação de Taylor em torno do estado-estacionário de um modelo.<sup>7</sup> Isto resulta em um sistema de equações que é linear em desvios-logaritmos. Para qualquer variável  $X_t$  faça  $\bar{X}$  o seu valor de estado estacionário (EE). Portanto o seu desvio será

$$x_t = \log(X_t) - \log(\bar{X}) \quad (\text{A-9})$$

ou seja,

$$X_t = \bar{X} e^{x_t} \quad (\text{A-10})$$

O desvio  $x_t$  pode então ser pensado como o desvio percentual da variável de seu valor de EE.

Isto implica que

$$x_t = d \log X_t = d \frac{X_t}{\bar{X}}$$

e

$$d \log(1 + X_t) = \frac{d(1 + X_t)}{1 + \bar{X}} \approx x_t$$

<sup>7</sup>Esta subseção é baseada em Gertler (2000), veja também Campbell (1994). Para mais detalhes sobre aproximações locais e log-linearização, veja Judd (1999, seção 6.1).

se  $X_t$  é um número pequeno.

Dada uma expressão qualquer

$$f(X_t, Y_t) = g(Z_t) \quad (\text{A-11})$$

podemos reescrever a expressão usando o fato de que  $X_t = e^{\log X_t}$ . Portanto (A-11) vem a ser:

$$f(e^{\log X_t}, e^{\log Y_t}) = g(e^{\log Z_t}). \quad (\text{A-12})$$

Agora aplicamos log na equação acima (A-13):

$$\log f(e^{\log X_t}, e^{\log Y_t}) = g(e^{\log Z_t}) \quad (\text{A-13})$$

Uma aproximação de Taylor de primeira ordem de uma função  $f(a, b)$  em torno de  $(A, B)$  é dado por

$$f(a, b) \approx f(A, B) + f_1(A, B)(a - A) + f_2(A, B)(b - B). \quad (\text{A-14})$$

Assim, podemos aproximar o lado esquerdo da equação (A-13) por

$$\begin{aligned} f(e^{\log X_t}, e^{\log Y_t}) &\approx \log f(X, Y) + \\ &+ \frac{1}{f(X, Y)} f_1(X, Y) X x_t + \frac{1}{f(X, Y)} f_2(X, Y) Y y_t. \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

Da mesma forma o lado direito pode ser aproximado por

$$g(e^{\log Z_t}) \approx \log g(Z) + \frac{1}{g(Z)} g_1(Z) Z z_t. \quad (\text{A-16})$$

Tomando em igualdade as aproximações (A-15) e (A-16) temos:

$$\begin{aligned} \log f(X, Y) + \frac{1}{f(X, Y)} f_1(X, Y) X x_t + \\ + \frac{1}{f(X, Y)} f_2(X, Y) Y y_t \approx \log g(Z) + \frac{1}{g(Z)} g_1(Z) Z z_t \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

e agora usamos o fato de que  $f(X, Y) = g(Z)$  para termos:

$$f_1(X, Y) X x_t + f_2(X, Y) Y y_t \approx g_1(Z) Z z_t. \quad (\text{A-18})$$

Em termos mais genéricos, a log-linearização da expressão

$$f(X_t^1, \dots, X_t^n) = g(Z_t^1, \dots, Z_t^m)$$

é dada por

$$\sum_{i=1}^n f_i(X^1, \dots, X^n) X^i x_t^i \approx \sum_{j=1}^m g_j(Z^1, \dots, Z^k) Z^j z_t^j. \quad (\text{A-19})$$

### A.2.1 Método sem Diferenciação

Em muitos casos, um método mais simples é disponível para log-linearizar um modelo sem explicitar a diferenciação. Na maioria dos casos não é necessário diferenciar as funções  $f$  e  $g$ . Em primeiro lugar observamos que podemos escrever  $X_t$  da seguinte forma:

$$X_t = X \frac{X_t}{X} = X e^{\log(X_t/X)} = X e^{x_t}. \quad (\text{A-20})$$

Então uma aproximação de Taylor em torno do EE,  $x = 0$ , implica que

$$\begin{aligned} X_t &= X e^{x_t} \\ &\approx X e^0 + X e^0 (x_t - 0) \\ &= X(1 + x_t). \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

Pela mesma lógica podemos escrever

$$\begin{aligned} X_t Y_t &\approx X(1 + x_t) Y(1 + y_t) \\ &= XY(1 + x_t + y_t + x_t y_t) \\ &\approx XY(1 + x_t + y_t), \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

uma vez que  $x_t y_t \approx 0$  quando  $x_t$  e  $y_t$  são suficientemente pequenos.

Em seguida, note que

$$\begin{aligned} f(X_t) &\approx f(X) + f'(X)(X_t - X) \\ &\approx f(X) + f'(X)X(X_t/X - 1) \\ &\approx f(X) + f(X)\eta(1 + x_t - 1) \\ &\approx f(X)(1 + \eta x_t) \end{aligned} \quad (\text{A-23})$$

onde  $\eta = \frac{\partial f(X)}{\partial X} \frac{X}{f(X)}$ .

Portanto, podemos usar alguns simples passos para log-linearização, alguns como descritos em Uhlig (1998, p. 34). Após as alterações necessárias na equação original use os seguintes passos e aproximações:

1. Reescreva todas as variáveis como  $X_t = X e^{x_t}$ ;
2. Use as seguintes regras:

$$X_t \approx X(1 + x_t) \quad (\text{A-24})$$

$$X_t Y_t \approx XY(1 + x_t + y_t) \quad (\text{A-25})$$

$$f(X_t) \approx f(X)(1 + \eta x_t) \quad (\text{A-26})$$

$$e^{x_t + ay_t} \approx 1 + x_t + ay_t \quad (\text{A-27})$$

$$x_t y_t \approx 0 \quad (\text{A-28})$$

$$E_t[ae^{x_{t+1}}] \approx E_t[ax_{t+1}] \text{ mais uma constante.} \quad (\text{A-29})$$

Vale notar que as constantes são excluídas de cada equação, uma vez que as equações satisfazem as relações de estado estacionário.

**Exemplo 4** *Suponha um exemplo baseado na restrição orçamentária de uma economia:*

$$Y_t = C_t + I_t$$

*reescreva isto como*

$$1 = \frac{C_t}{Y_t} + \frac{I_t}{Y_t}$$

*Usando (A-25) obtemos:*

$$1 \approx \frac{C}{\bar{Y}}(1 + c_t - y_t) + \frac{I}{\bar{Y}}(1 + i_t - y_t)$$

$$\left(\frac{C}{\bar{Y}} + \frac{I}{\bar{Y}}\right) y_t \approx \frac{C}{\bar{Y}}(1 + c_t) + \frac{I}{\bar{Y}}(1 + i_t)$$

*Uma vez que em estado estacionário*

$$Y = C + I \Rightarrow \frac{C}{\bar{Y}} = -\frac{I}{\bar{Y}}$$

*Portanto, a restrição orçamentária linearizada é:*

$$y_t \approx \frac{C}{\bar{Y}}c_t + \frac{I}{\bar{Y}}i_t.$$

□

## A.2.2 Equações Multiplicativas

Se a equação a ser linearizada contém apenas termos multiplicativos existe um procedimento adequado para este caso. Suponha a seguinte equação:

$$\frac{X_t Y_t}{Z_t} = \alpha$$

onde  $\alpha$  é uma constante. Para log-linearizar devemos dividir a equação pelas variáveis de estado estacionário:

$$\frac{\frac{X_t}{\bar{X}} \frac{Y_t}{\bar{Y}}}{\frac{Z_t}{\bar{Z}}} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

Agora tome logs

$$\log\left(\frac{X_t}{\bar{X}}\right) + \log\left(\frac{Y_t}{\bar{Y}}\right) - \log\left(\frac{Z_t}{\bar{Z}}\right) = \log(1) = 0$$

Agora usando a equação (A-9) chegamos rapidamente ao seguinte resultado:

$$x_t + y_t - z_t = 0$$

Vale notar que neste caso esta equação log-linearizada **não é uma aproximação**.

### A.2.3 Outros Exemplos

**Exemplo 5** Log-linearização de  $R_t = \theta \frac{Y_t}{K_{t-1}} + 1 - \delta$ . Faça

$$\bar{R}e^{r_t} = \theta \left( \frac{Y_t}{K_{t-1}} \right) e^{y_t} e^{-k_{t-1}} + 1 - \delta$$

fazendo uso de (A-27) e da condição de EE, a versão aproximada da equação de retorno é:

$$\bar{R}r_t = \theta \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} (y_t - k_{t-1}).$$

□

**Exemplo 6** Log-linearização de  $\Lambda_t = \beta E_t[\Lambda_{t+1} R_{t+1}]$ . Faça

$$\bar{\Lambda} e^{\lambda_t} = \beta E_t \left[ \bar{\Lambda} e^{\lambda_{t+1}} \bar{R} e^{r_{t+1}} \right]$$

Que resulta exatamente em:

$$e^{\lambda_t} = E_t \left[ e^{\lambda_{t+1}} e^{r_{t+1}} \right]$$

pelo uso da condição de EE. Tomando a aproximação (A-27), podemos reescrever a equação acima como:

$$1 + \lambda_t = E_t [(1 + \lambda_{t+1})(1 + r_{t+1})]$$

Tomando uma expansão de Taylor de primeira ordem para  $\lambda_t = \lambda_{t+1} = r_{t+1}$  resulta em:

$$\lambda_t = E_t [\lambda_{t+1} r_{t+1}].$$

□

**Exemplo 7** Log-linearização de  $A = \Lambda(1 - \theta) \frac{Y_t}{N_t}$ . Para este caso podemos usar a dica para simples equações multiplicativas (seção A.2.2). Escreva a CPO do mercado de trabalho da seguinte forma:

$$\frac{A}{1 - \theta} = \frac{\Lambda_t Y_t}{N_t}$$

Divida as variáveis pelo seu valor de EE:

$$\frac{A}{1 - \theta} = \frac{\frac{\Lambda_t}{\bar{\Lambda}} \frac{Y_t}{\bar{Y}}}{\frac{N_t}{\bar{N}}}$$

Aplicando logs temos:

$$\log \left( \frac{A}{1 - \theta} \right) = \log \left( \frac{\Lambda_t}{\bar{\Lambda}} \right) + \log \left( \frac{Y_t}{\bar{Y}} \right) - \log \left( \frac{N_t}{\bar{N}} \right)$$

Aplicando a definição de desvio-logaritmo (A-9) e aproximando para o EE, temos portanto:

$$n_t = y_t + \lambda_t.$$

□

#### A.2.4 Caselli's Recipe

Aqui apresentamos algumas dicas bem organizadas de como aplicar log-linearização. Estas dicas são devidas a Francesco Caselli (2003).

1. Você deseja log-linearizar alguma relação  $g(X_t) = 0$ , onde  $X_t$  é algum vetor em função do tempo;
2. Obviamente,  $g(\bar{X}) = 0$ ;
3. Reescreva como  $g(\bar{X}e^{x_t}) = 0$ , onde  $x_t = \log(X_t) - \log(\bar{X})$ ;
4. Olhe para o que você tem. Você pode usar  $g(\bar{X} = 0) = 0$  para conseguir uma equação linear em  $x_t$ ?
  - (a) Se a resposta é sim, então pare. Note que isto funciona com  $Y_t = K_t^\theta (Z_t N_t)^{1-\theta}$ . Também note que o resultado é exato e não uma aproximação.
  - (b) Caso contrário, continue.
5. Aproxime todos os  $e^{x_t}$  com  $1 + x_t$ .
6. Olhe para o que você tem. Tente de novo usar  $g(\bar{X}) = 0$  para fazer isto linear em  $x_t$ . Isto funcionou?
  - (a) Se funcionou, então pare. Isto funciona com a restrição orçamentária e com a equação de retorno.
  - (b) Caso contrário, continue.
7. Tome uma expansão de Taylor de primeira ordem em torno de  $x_t = 0$ . Use sempre  $g(\bar{X}) = 0$ . Este último passo sempre funciona.

## Referências

- [1] Auerbach, Alan e Lawrence Kotlikoff, *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge, Cambridge University Press, 1988.
- [2] Backus, David e Patrick J. Kehoe. "International evidence on the historical properties of business cycles." *American Economic Review*, 82, 1992, pp. 864-88.
- [3] Baxter, Marianne e Robert G. King. "Measuring business cycles: approximate band-pass filters for economic time-series." *Review of Economics and Statistics*, November, 1999.
- [4] Blanchard, Olivier J. and Charles M. Kahn, "The solution of linear difference models under rational expectations," *Econometrica*, 48, 1980, pp. 1305-1311.

- [5] Burns, Arthur e Wesley C. Mitchell. *Measuring Business Cycles*. New York, NBER, 1946.
- [6] Campbell, John Y., “Inspecting the mechanism: An analytical approach to the stochastic growth model,” *Journal of Monetary Economics*, 33, 1994, pp. 463-506.
- [7] Canova, Fabio. “Detrending and business cycle facts.” *Journal of Monetary Economics*, 41, 1998, pp. 475-512.
- [8] Caselli, Francesco, “Stochastic dynamic general equilibrium models”, lecture notes, Harvard University, 2003, <http://post.economics.harvard.edu/faculty/caselli/caselli.html>.
- [9] Chow, Gregory C., *Dynamic Economics: Optimization by the Lagrange Method*, Oxford University Press, 1997.
- [10] Christiano, Larry, “Solving dynamic equilibrium models by a method of undetermined coefficients,” *Computational Economics*, 20, 2002, pp. 21-55.
- [11] Cogley, Timothy e James M. Nason. “Output dynamics in Real-Business-Cycle models.” *American Economic Review*, 85 (3), 1995, pp. 492-511.
- [12] Cooley, Thomas F., “Calibration,” lecture notes, NYU, 1997.
- [13] Cooley, Thomas F. and Edward C. Prescott, “Economic growth and business cycles”, In: Thomas F. Cooley (ed.), *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton, Princeton University Press, 1995.
- [14] Ellery Jr., Roberto, Victor Gomes e Adolfo Sachsida. “Business cycle fluctuations in Brazil.” *Revista Brasileira de Economia*, 56 (2), 2002, pp.
- [15] Englund, Peter, Torsten Persson e Lars E.O. Svensson. “Swedish business cycles: 1861-1988.” *Journal of Monetary Economics*, 30, 1992, pp. 343-371.
- [16] Gertler, Mark, “An introduction to log-linearizations,” lecture notes, 2000.
- [17] Gollin, Douglas. “Getting income shares right.” *Journal of Political Economy*, 110 (2), 2002, pp. 458-474.
- [18] Hamilton, James D., *Time Series Analysis*. Princenton, Princenton University Press, 1994.

- [19] Hansen, Gary D., “Indivisible labor and the business cycle”, *Journal of Monetary Economics*, 16, 1985, pp. 309-327.
- [20] Hassler, John, Petter Lundvik, Torden Persson e Paul Soderlind. (1994). “The Swedish business cycles: stylized facts over 130 years.” In Villy Berstrom and Anders Vredin, eds. *Measuring and Interpreting Business Cycles*. Oxford, Oxford University Press.
- [21] Hodrick, Robert J. e Edward C. Prescott. “Postwar US business cycles: an empirical investigation.” *Journal of Money, Credit and Banking*, 29 (1), 1997, pp. 1-16.
- [22] Judd, Kenneth, *Numerical Methods in Economics*, Cambridge, MIT Press, 1999.
- [23] Kydland, Finn E. e Edward C. Prescott, “Time to build and aggregate fluctuations”, *Econometrica*, 50, 1982, pp. 1345-1370.
- [24] Kydland, Finn E. e Edward C. Prescott. “Business cycles: real facts and a monetary myth.” *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 14 (2), 1990.
- [25] Kydland, Finn E. e Edward C. Prescott. “The econometrics of the general equilibrium approach to business cycle.” *Scandinavian Journal of Economics*, 93(2), 1991, pp. 161-178.
- [26] Ljungqvist, Lars e Thomas J. Sargent, *Recursive Macroeconomic Theory*, Cambridge, MIT Press, 2000.
- [27] Lucas, Jr., Robert E. “Methods and problems in business cycle theory.” *Journal of Money, Credit and Banking*, 1980, Reprinted in *Studies in Business-Cycle Theory*. Cambridge, MIT Press, 1981.
- [28] Marimon, Ramon e Andrew Scott, eds., *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, Oxford, Oxford University Press, 1999.
- [29] Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston e Jerry R. Green, *Microeconomic Theory*, New York, Oxford University Press, 1995.
- [30] Prescott, Edward C. “Business cycle research: methods and problems.” Federal Reserve Bank of Minneapolis, Working paper 590, October 1998.
- [31] Rust, John, “Lagrange multiplier methods for MDPs.” lecture notes, University of Maryland, 2000. <http://gemini.econ.umd.edu/>.
- [32] Sims, Chris, “Pitfalls of linear approximation of stochastic models,” Princeton University, 2002.

- [33] Shoven, John e John Whaley, “Applied general equilibrium models of taxation and international trade,” *Journal of Economic Literature*, 22, 1984, pp. 1007-1051.
- [34] Uhlig, Harald, “A toolkit for analysing nonlinear dynamic stochastic models easily”, in *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, edited by Ramon Marimon and Andrew Scott. Oxford, Oxford University Press, 1999.