O Modelo Neoclássico de Crescimento

Prof. Victor Gomes

2 de novembro de 2002

Nestas notas apresentamos uma breve descrição do modelo de crescimento neoclássico que é a principal ferramenta da abordagem do equilíbrio geral dinâmico. Para mais detalhes veja as notas de aula do Prof. Edward Prescott, Growth Notes, Part. I and II ou Nancy L. Stokey, Robert E. Lucas com Edward C. Prescott, Recursive Methods in Economic Dynamics, Harvard University Press, 1989, cap. 2.

1 As Famílias

Uma família ou um chefe de família possui uma unidade de tempo em todo período que pode ser usada para o trabalho h, ou para atividades que não são de mercado, o lazer l. O tempo que cada agente dispõe e normalizado para 1, e ele é em torno de 100 horas por semana. O tempo alocado para o sono ou cuidado pessoal não é tomado como tempo disponível. O lazer é $l = 1 - h$. As variáveis minúsculas, como x representam indivíduos, e as maiúsculas, como X, representam o agregado (i.e. a soma dos indivíduos).

As preferências dos indivíduos são definidas sobre sequências infinitas de consumo $\{c_t\}$ e lazer $\{1 - h_t\}$. Portanto, as preferências das famílias são ordenadas por

$$U = E\left\{\sum_{t=0}^{\infty}(\beta\eta)^t(1+\eta)^t u(c_t, l_t)\right\} \tag{1}$$

em que β é o fator de desconto intertemporal e $u(\cdot,\cdot)$ a função de utilidade instantânea. A cada período t, os indivíduos enfretam a restrição orçamentária:

$$c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t \tag{2}$$

em que i_t representa o investimento, w_t o salário por hora trabalhada, h_t o total de horas trabalhadas, r_t a remuneração do capital, e k_t o estoque de capital.

Portanto, o problema dos indivíduos consiste em maximizar o valor esperado da utilidade descontada (1), sujeito à restrição orçamentária (2), dados o estoque de capital inicial e a regra de movimento do capital:

$$(1+\eta)(1+\gamma)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{3}$$

em que δ representa a taxa depreciação e γ a taxa de progresso técnico ou de crescimento da produtividade.

2 Firmas

As firmas operam uma tecnologia com retornos constantes de escala. A oferta total da economia é dada pela seguinte função de produção:

$$Y_t = z_t f(K_t, A_t H_t) = z_t (1+\gamma)^{(1-\theta)t} K_t^{\theta} H_t^{1-\theta} \tag{4}$$

em que K_t representa o estoque de capital agregado, H_t as horas totais trabalhadas e z_t é uma variável aleatória que segue a seguinte regra de movimento:

$$z_{t+1} = 1 - \rho + \rho z_t + \varepsilon_t \tag{5}$$

sendo ε_t uma variável aleatória com distribuição normal, independente e identicamente distribuída, com média 0 e variância σ^2.

As firmas se encontram face a uma sequência de problemas de maximização estático a cada período, um a cada data, pois as mesmas operam em mercados competitivos. O problema no período t é:

$$\max_{h_t, k_t} \{ f(k_t, h_t, t) - w_t h_t - r_t k_t \} \tag{6}$$

As firmas escolhem os fatores em mercados perfeitamente competitivos, portanto a remuneração dos fatores de produção é:

$$w_t = z_t (1+\gamma)^{(1-\theta)} (1-\theta) K^{\theta} H_t^{-\theta} \ \text{ e } \ r_t = z_t (1+\gamma)^{(1-\theta)} \theta K_t^{\theta-1} H_t^{1-\theta} \tag{7}$$

3 Problema Dinâmico das Famílias e Equilíbrio Recursivo

Pode-se provar que o equilíbrio resultante do problema das famílias e das firmas é Pareto-ótimo. Se o preço dos fatores de produção não sofrem distorções e as preferências são bem comportadas, então o Segundo Teorema do Bem-Estar pode ser aplicado.

Teorema 1 *(Segundo Teorema do Bem-Estar) Assuma que as preferências são convexas, contínuas, não-decrescentes e localmente insasiáveis, e que os conjuntos de produção são convexos. Então se um equilíbrio é Pareto-ótimo então é um equilíbrio competitivo.*

Prova: Veja Stokey, Lucas e Prescott, 1989, pp. 27-28 (no livro não há uma prova direta mas uma boa indicação).

Portanto, se sabemos que o equilíbrio resultante do modelo sem distorções sobre os preços dos fatores é Pareto-ótimo podemos aplicar o Segundo Teorema do Bem-Estar e substituir o valor total pago aos fatores de produção pela função de produção. Desta forma o problema do modelo básico de equilíbrio geral dinâmico assume a seguinte forma:

$$\max_{\{c_t, i_t, h_t\}_{t=0}^{\infty}} E\left\{\sum_{t=0}^{\infty}(\beta\eta)^t(1+\eta)^t u(c_t, l_t)\right\} \tag{8}$$

s.a.

$$c_t + i_t \leq f(k_t, h_t) \tag{9}$$

$$(1+\eta)(1+\gamma)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{10}$$

A partir do que foi visto podemos definir o equilíbrio desta economia.

Definição (Equilíbrio Geral Dinâmico): Um equilíbrio recursivo para esta economia consiste num conjunto capaz de suportar a solução do problema do consumidor; um conjunto de regras de decisão: $c(z,k,K)$, $h(z,k,K)$ e $i(z,k,K)$; um conjunto de decisões agregadas: $C(z,K)$, $H(z,K)$ e $I(z,K)$; e preços de fatores $w(z,K)$ e $r(z,K)$, tais que estas funções satisfaçam:

1. o problema dinâmico das famílias:

$$\max_{\{c_t,i_t,h_t\}_{t=0}^{\infty}} E\left\{\sum_{t=0}^{\infty}(\beta\eta)^t(1+\eta)^t u(c_t,l_t)\right\}$$

   sujeito a (2), dados (5), (3), e k_0.

2. o comportamento ótimo das firmas, (7)

3. a consistência entre as regras agregadas e individuais, ou seja, $Nc(z,k,K) = C(z,K)$; $Nh(z,k,K) = H(z,K)$ e $Ni(z,k,K) = I(z,K)$, onde N representa o número de indivíduos ou, de forma mais precisa, N representa a medida do conjunto de indivíduos.

4. a restrição agregada de recursos, ou seja, que todos os mercados se equilibram:

$$C(z,K) + I(z,K) = Y(z,K)$$

$\square$