Modelo de Solow, Resíduo de Solow e Contabilidade do Crescimento

Roberto Ellery Jr.[‡]
Universidade de Brasília

Victor Gomes[‡‡]
Universidade Católica de Brasília

11 de março de 2003

1 Modelo de Crescimento de Solow

Explicar os determinantes do crescimento de uma economia é um dos principais desafios com que se depara a ciência econômica. Associadas ao crescimento estão questões que costumam prender a atenção de todos que se dedicam ao tema, como por exemplo:

1. Quais os determinantes da riqueza de uma nação?

2. Por que alguns países são mais ricos que outros?

3. Existe alguma *tendência natural* para que a renda de todos os países venham a se igualar?

Para podermos tratar destas questões precisamos de uma estrutura lógica que nos ajude a conduzir a nossa análise, tal estrutura deve ser conter o que acreditamos ser os principais fatores que podem explicar o crescimento de uma economia, deve ser de tal forma que todas as hipóteses que fizermos fiquem bem claras, assim como devem estar claras todas as implicações de nossas hipóteses. Uma maneira adequada e bastante popular de realizar esta tarefa consiste no uso de modelos matemáticos, estes modelos são construídos de forma que nos forçam a explicitar as nossas hipóteses, nos obriga a manter a coerência lógica de nossos argumentos de forma a nos garantir que nossas

[‡]ellery@unb.br
[‡‡]victor@pos.ucb.br

conclusões decorrem, de forma lógica, de nossos argumentos. Embora modelos matemáticos não sejam a única forma de garantir a consistência lógica entre nossas hipóteses e nossas conclusões, são a maneira mais simples e segura de atingir este objetivo.

O problema do crescimento econômico sempre esteve presente nas discussões sobre economia sendo este problema, de forma questionável, a principal motivação do primeiro tratado sobre economia, chamado *"Um Inquérito sobre a Natureza e as Causas da Riqueza das Nações"*, escrito por Adam Smith e publicado em 1776, apesar deste livro tratar de práticamente todos os temas relacionados a economia o título já denuncia a preocupação central com problemas relacionados ao crescimento econômico.

No decorrer do tempo vários modelos matemáticos foram construídos para estudar o crescimento econômico porém, apenas em 1956, apareceu um modelo que capaz de explicar o crescimento a partir do comportamento de firmas e famílias, e não a partir de hipóteses *ad hoc* sobre a relação entre agregados macroeoconômicos. Este modelo foi devido a Robert Solow que o apresentou em um artigo chamado *"A contribution to the theory of economic growth"*. O comportamento das famílias era trivial,[1] de acordo com a teoria keynesiana da época assumiu-se que as famílias poupavam uma fração fixa da renda, ou seja,

$$S_t = \sigma Y_t \tag{1}$$

onde S_t representa a poupança, Y_t a renda e $\sigma \in (0\ 1)$ representa a fração da renda que será poupada no período t. Isto equivale a assumir que o agente representativo nesta economia trabalha um número fixo de horas $h_t = 1$, poupa ou investe $i_t = \sigma y_t$, e consome $c_t = (1-\sigma)y_t$, em cada período. Tal que h representa o total de horas de cada trabalhador, i o investimento, c o consumo e y a renda de cada agente.

Da contabilidade nacional sabemos que o investimento, definido como o total de máquinas, equipamentos, construções mais as variações nos estoques das firmas, deve ser igual a poupança a cada período, ou seja

$$I_t = S_t = \sigma Y_t \tag{2}$$

também sabemos que por definição, o investimento representa a variação no estoque de capital, ou seja

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \tag{3}$$

onde $\delta \in (0,1)$ representa a taxa de depreciação do estoque de capital, ou seja, a cada período o correspondente a δK_t é depreciado. Esta equação é conhecida na literatura como a *lei de movimento do capital.*

[1]Este problema foi resolvido em 1965 por David Cass (1965) e também por Tjalling Koopmans (1965).

Considere que a população cresce a uma taxa η e a tecnologia cresce a uma taxa γ, de forma que $N_{t+1} = (1+\eta)N_t$ e $A_{t+1} = (1+\gamma)A_t$, isto nos permite escrever a equação (3) da seguinte forma:

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} = \frac{(1-\delta)K_t}{A_{t+1}N_{t+1}} + \frac{I_t}{A_{t+1}N_{t+1}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} = \frac{(1-\delta)K_t}{(1+\gamma)A_t(1+\eta)N_t} + \frac{I_t}{(1+\gamma)A_t(1+\eta)N_t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1+\gamma)(1+\eta)\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} = (1-\delta)\frac{K_t}{A_tN_t} + \frac{I_t}{A_tN_t}$$

definindo a variável por unidade de eficiência como a variável dividida pela mão-de-obra vezes o nível de tecnologia, ou seja, fazendo $k_t = \frac{K_t}{A_tN_t}$ e $i_t = \frac{I_t}{A_tN_t}$, temos que:

$$(1+\gamma)(1+\eta)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t. \tag{4}$$

Nesta economia existe um único produto que as firmas produzem de acordo com uma função de produção agregada. Faça esta função de produção ser $Y_t = f(H_t, K_t)$. Assumimos por hipótese que o trabalho empregado é idêntico a população, ou seja $H_t = N_t$. Aplicando o conceito de unidades de eficiência na função de produção, temos que o produto por unidades de eficência será dado por:

$$y_t = f(k_t) \tag{5}$$

considerando as equações (2), (5) temos que:

$$(1+\gamma)(1+\eta)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + \sigma f(k_t) = g(k_t) \tag{6}$$

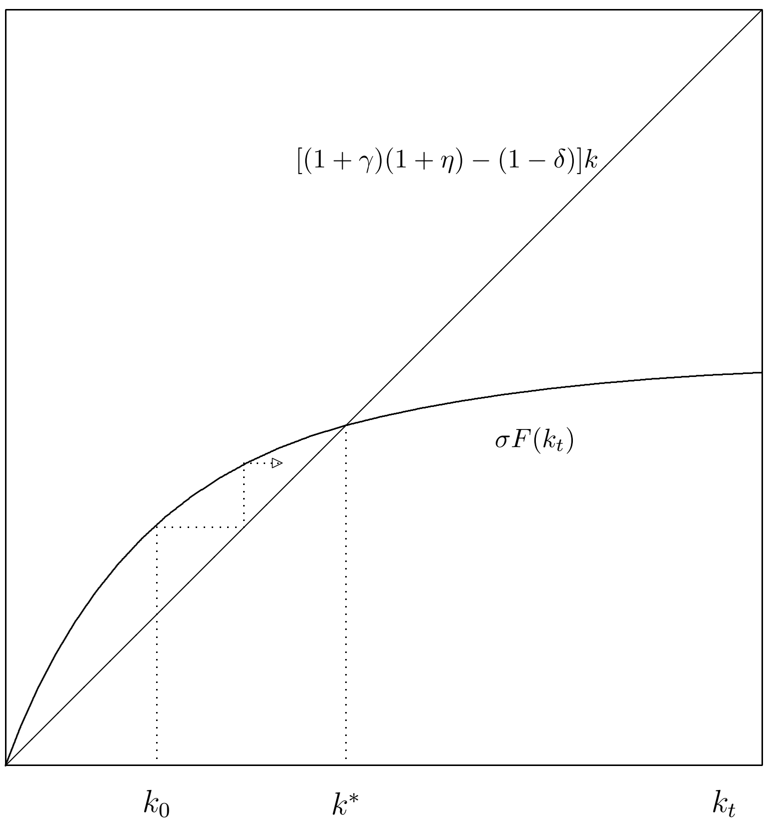
esta equação a diferenças de primeira ordem, junto com o estoque de capital inicial (k_0), determina o comportamento do estoque de capital por unidades de eficiência e, por consequência, determina como o produto, o consumo, etc., se comportam no tempo.

Definição 1 *Um* ***estado estacionário*** *do sistema é uma solução para* $k = g(k)$.

Dizemos que uma economia encontra-se no **estado estacionário** *quando todas as suas variáveis (estoque de capital, produto, consumo, investimento e poupança) assumirem um valor constante no tempo.*

Nossas hipóteses implicam que, como mostrado na Figura 1, $g(0) = 0$, $g'(0) > 1$, e existe um único $k^* > 0$ tal que $k^* = g(k^*)$. Assim, o modelo tem dois estados estacionários, $k = 0$ e $k = k^*$. Além disso, para todo

Figura 1: Modelo de Crescimento de Solow



$k_0 > 0, k_t \to k^*$ (monotonicamente). Assim, quando $t \to \infty, y_t \to y^*, c_t \to c^*$, etc.

A k^* temos que $\sigma F(k^*) = [(1+\gamma)(1+\eta) - (1-\delta)]k^*$, que implica que a poupança apenas repõe a depreciação e que a razão capital-produto é $\frac{k}{y} = \frac{\sigma}{\delta}$, e também que $c^* = y^* - \delta k^*$. Claramente, k^* é crescente em $\frac{\sigma}{\delta}$. Além disso, c^* é primeiro crescente e então decrescente em σ. A taxa de poupança que maximiza o consumo do estado estacionário pode facilmente ser mostrada que satisfaz $F'(k^*) = \delta$; esta é a chamada "regra de ouro" da acumulação de capital de Phelps (veremos em detalhes na seção).

Para entendermos o comportamento do modelo de Solow será interessante considerar um exemplo numérico. Suponha que a taxa de crescimento da população seja de aproximadamente 2% a.a. e que a tecnologia, ou a produtividade, cresça a uma taxa de 2,6% a.a., ou seja, $\eta = 0{,}02$ e $\gamma = 0{,}026$,[2] assuma também que $a = 0{,}35$[3] e que a depreciação é de 10% ao ano, ou seja $\delta = 0,1$. Para diversos valores de s iremos calcular o comportamento do estoque de capital e do produto quando a economia parte de um estoque de capital igual a um.[4] A Tabela 1 mostra o resultado das simulações.

Observando a Tabela 1 podemos chegar a duas conclusões importantes sobre o modelo de Solow, uma de caráter mais teórico e outra capaz de sugerir políticas macroeconômicas. A primeira conclusão é que a partir de um certo período o estoque de capital e o produto por unidades de eficiência chegam a um valor constante. Note que se o produto por unidade de eficiência é constante o consumo e o investimento também devem ser constantes, visto que ambos são frações do produto. Desta forma podemos dizer que em um certo momento a economia chegará a uma situação onde todas as variáveis medidas em unidades de eficiência tornar-se-ão constantes no tempo, quando uma economia encontra-se nesta situação dizemos que ela atingiu o estado estacionário.

A segunda conclusão diz respeito ao valor do produto no estado estacionário, note que quanto maior a taxa de poupança maior será o produto por unidades de eficiência no estado estacionário. Isto sugere que uma maneira de tornar um país mais rico seria implementar políticas que aumentem a taxa de poupança, este tipo de política foi perseguida em vários países, inclusive no Brasil, como forma de estimular o crescimento da economia. A

[2]Estes valores são consistentes com os encontrados em Ellery Jr., Gomes e Sachsida (2002) para a economia brasileira.

[3]Mais adiante discutiremos o significado de a, por enquanto basta saber que este valor é consistente com algumas observações reportadas para a economia brasileira

[4]O valor do estoque de capital inicial não é relevante para este exercício, a demonstração deste resultado necessita um conhecimento de equações em diferenças e foge ao objetivo destas notas.

Tabela 1: Capital e Produto no Modelo de Solow

	$s = 0{,}10$		$s = 0{,}15$		$s = 0{,}20$		$s = 0{,}25$	
ano	capital	produto	capital	produto	capital	produto	capital	produto
001	1	1	1	1	1	1	1	1
002	0,9555	0,9842	1,0033	1,0012	1,0511	1,0176	1,0989	1,0335
003	0,9158	0,9697	1,0063	1,0022	1,0984	1,0334	1,1919	1,0634
004	0,8802	0,9563	1,0091	1,0031	1,1421	1,0476	1,2791	1,0900
005	0,8484	0,9441	1,0116	1,0041	1,1824	1,0604	1,3604	1,1137
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
025	0,5960	0,8343	1,0330	1,0114	1,5467	1,1649	2,1281	1,3026
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
050	0,5593	0,8160	1,0364	1,0126	1,6077	1,1808	2,2614	1,3305
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
075	0,5560	0,8143	1,0367	1,0127	1,6134	1,1822	2,2739	1,3331
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
098	0,5557	0,8141	1,0367	1,0127	1,6139	1,1823	2,2749	1,3333
099	0,5556	0,8141	1,0367	1,0127	1,6139	1,1823	2,2749	1,3333
100	0,5556	0,8141	1,0367	1,0127	1,6139	1,1823	2,2749	1,3333

adoção deste tipo de política nem sempre é bem sucedida, existem dois fatores que muitas vezes não são levados em conta e que podem comprometer as políticas de incentivo a poupança. O primeiro é que, segundo o Modelo de Solow, aumentos na taxa de poupança levam a um crescimento do produto por unidades de eficiência no estado estacionário, nada pode ser afirmado quanto a taxa de crescimento da economia, até porque, de acordo com a definição de estado estacionário, a taxa de crescimento seria zero, trataremos deste problema a seguir. O segundo fator importante é que o Modelo de Solow assume que a taxa de poupança é constante e determinada de forma exógena, ou seja, as pessoas não decidem o quanto poupar, por hipótese elas apenas poupam uma determinada fração de sua renda, não importa o que aconteça, esta é uma das principais críticas ao Modelo de Solow e consiste em um problema teórico que foi resolvido por David Cass e Tjalling Koopmans em 1965, adiante retornaremos a este tópico.

1.1 Poupança e Crescimento no Modelo de Solow

Na seção anterior vimos que a partir de um certo momento no tempo as variáveis macroeconômicas, medidas em unidades de eficiência, assumem um valor constante, definimos esta situação como estado estacionário. Não provamos, mas o exemplo da Tabela 1 sugere que a economia alcança o estado estacionário independente do estoque de capital inicial estar acima ou abaixo do valor do estado estacionário, de outra forma podemos afirmar que, no Modelo de Solow, a economia sempre converge para seu estado estacionário.[5]

Afirmar que a economia sempre converge para o estado estacionário equivale a dizer que, no longo prazo, o produto de uma economia sempre vai parar de crescer. Este é um resultado estranho, mesmo após muitos anos da Revolução Industrial as economias ocidentais continuam a crescer, como conciliar este fato com o Modelo de Solow é o objetivo desta seção, em outras palavras procuramos saber como o Modelo de Solow explica o crescimento de longo prazo.

Uma saída tentadora seria argumentar que as economias ainda não alcançaram seus estados estacionários, que o estado estacionário só ocorre depois de milhares de anos. Apesar de tentadora esta alternativa não resolve nosso problema, de fato, argumentar que a realidade não se comporta de acordo com previsto em um modelo porque as condições do modelo nunca são alcançadas, não parece estar de acordo com a idéia de falseabilidade que guia o método cientifico. Se tivessemos que seguir por este caminho seria mais apropriado abandonar o Modelo de Solow sob o argumento de que ele não explica a realidade. De fato, o Modelo de Solow apresenta sérios problemas e foi amplamente revisado desde 1956, mas, por enquanto, não nos deparamos com estes problemas e o Modelo de Solow pode, e deve, continuar a ser explorado.[6]

Uma alternativa muito mais interessante e consistente de abordar a questão do crescimento no Modelo de Solow é considerar as unidades em que as variáveis estão sendo medidas. Em nossa análise estamos trabalhando com variáveis medidas em unidades de eficiência, enquanto ao medir o desempenho das economias costumamos usar variáveis *per-capita*, ora o fato da variável estar estacionária quando medida em unidades de eficiência não implica que ela deva estar estacionária quando medida de forma *per-capita*, considere o produto medido por unidades de eficiênica:

$$y_t = \frac{Y_t}{A_t N_t}$$

sabemos que o produto *per-capita* é igual ao produto dividido pela população,

[5]Mais adiante discutiremos melhor a questão da convergência para o estado estacionário.

[6]Apesar de amplamente revisado o Modelo de Solow constinua sendo a referencia fundamental para o estudo do crescimento econômico.

ou seja:

$$\hat{y}_t = \frac{Y_t}{N_t}$$

onde $\hat{y}_t$ representa o produto *per-capita.* Consideramos as duas definições temos que o produto *per-capita* pode ser escrito como:

$$\hat{y}_t = A_t y_t$$

ou seja, o produto *per capita* é igual ao produto por unidade de eficiência multiplicado pela variável que mede o progresso tecnológico, qual seja A_t. Para determinar a taxa de crescimento do produto *per-capita* quando o produto por unidades de eficiência encontra-se no estado estacionário, basta usar o fato que, no estado estacionário, $y_{t+1} = y_t = y$. Logo temos que, no estado estacionário, o produto *per-capita* será tal que:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= A_t y \\ \hat{y}_{t+1} &= A_{t+1} y = (1+\gamma) A_t y \end{aligned}$$

portanto temos que:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = 1 + \gamma \tag{7}$$

De acordo com a equação (7) quando a economia encontra-se no estado estacionário, medida em unidades de eficiência, o produto *per-capita* cresce a uma taxa γ, que é também a taxa de crescimento da tecnologia. Podemos mostrar que todas as outras variáveis medidas em termos *per-capita* crescem a mesma taxa que o produto *per-capita*, o que caracteriza uma situação conhecida como caminho de crescimento equilibrado.

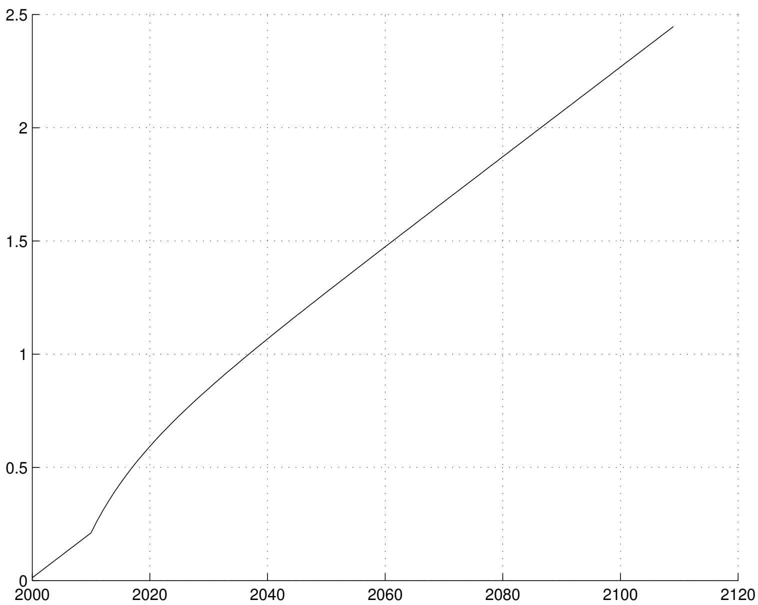
Definição 2 *Uma economia encontra-se em um* **caminho de crescimento equilibrado** *quando todas as variáveis macroeconômicas crescem a mesma taxa.*

Desta forma podemos afirmar que quando uma economia se encontra no caminho de crescimento equilibrado o produto *per-capita* cresce a uma taxa igual a do progresso tecnológico, dito de outra forma, o Modelo de Solow conclui que, no longo prazo, a taxa de crescimento da economia (determinada pela taxa de crescimento do produto *per-capita* será igual a taxa de crescimento da produtividade. A principal implicação deste resultado é que aumentar a taxa de poupança não aumenta a taxa de crescimento da economia no longo prazo.

No curto prazo, porém, o aumento da taxa de poupança leva a um aumento da taxa de crescimento da economia. O motivo é simples, uma vez que a maior taxa de poupança leva a um maior nível de produto *per-capita* a economia deverá crecer a uma maior taxa até encontrar o novo estado estacionário. Uma vez que a economia alcança este novo estado estacionário, ou este novo caminho de crescimento equilibrado, o produto *per-capita* volta a crescer a uma taxa igual à da produtividade.

Podemos fazer um experimento numérico para avaliar os efeitos de um aumento na taxa de poupança. Considere uma economia onde $\eta = 0{,}02$, $\gamma = 0{,}026$, $a = 0{,}35$ e $\delta = 0{,}10$, assuma também que a taxa de poupança é de 15%, ou seja $s = 0{,}15$. Suponha que o governo implementa uma política que faz com que a taxa de poupança suba para 25%, ou seja, $s = 0{,}25$. Como vimos na Tabela 1 o produto por unidades de eficiência saltará de aproximadamente 1,01 para 1,33. Por meio das equações (4) e (7) podemos determinar o comportamento do produto *per-capita* antes, durante e depois da transição para o novo caminho de crescimento equilibrado, que estará associado ao novo estado estacionário.

Figura 2: Caminho de Crescimento Equilibrado com Mudança em σ



Na Figura 2 assume-se que a mudança na taxa de poupança ocorreu em 2010, a área hachureada, que vai de 2010 a 2025, representa o período de transição, a partir de 2025 a economia volta a seu caminho de crescimento equilibrado. Na figura o produto *per-capita* está representado em escala logaritmica, de forma que a taxa de crescimento da economia é igual a inclinação da curva no gráfico. Desta forma, fica fácil perceber que a taxa de crescimento da economia, ou seja, a inclinação da curva, só aumenta durante o período de transição. A Figura 2 ilustra o que foi discutido acima, de maneira que podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 1 *A taxa de poupança é importante na determinação do nível de renda e da taxa de crescimento de curto prazo, porém a taxa de poupança não influencia a taxa de crescimento no longo prazo. Quando consideramos o longo prazo a taxa de crescimento da economia será determinada apenas pela taxa de crescimento tecnológico, ou seja, a economia só irá apresentar um crescimento sustentável se for capaz de operar com tecnologias cada vez mais produtivas.*

Em termos de política econômica a proposição acima diz que a forma de o governo aumentar a taxa de crescimento da economia é permitir que as empresas adotem as melhores tecnologias. Políticas de gerenciamento macroeconômico que busquem o aumento da taxa de poupança apenas afetarão o crescimento da economia no curto prazo.

1.2 A Regra de Ouro da Acumulação de Capital e a Ineficiência Dinâmica

Para uma dada função de produção e valores de δ, existe um único valor de estado estacionário $k^* > 0$ para cada valor da taxa de poupança σ. Vamos representar esta relação por $k^*(\sigma)$, tal que $dk^*(\sigma)/d\sigma > 0$. Do nível do consumo per-capita de estado estacionário temos

$$c^*(\sigma) = F(k^*(\sigma)) - [(1+\gamma)(1+\eta) - (1-\delta)]k^*(\sigma) \tag{8}$$

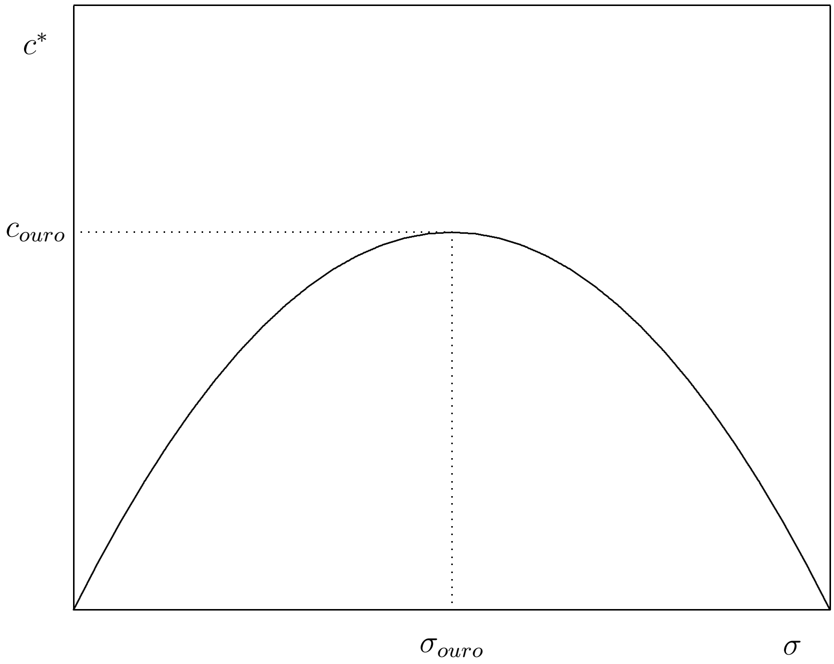
A Figura 3 mostra a relação entre c^* e σ que é determinada pela equação (8). A quantidade de c^* é crescente em σ para níveis baixos de σ e decrescente para altos valores de σ. A quantidade de consumo de estado estacionário c^* será máximo quando

$$\frac{\partial c^*(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial F(k^*(\sigma))}{\partial k^*}\frac{dk^*}{d\sigma} - [(1+\gamma)(1+\eta) - (1-\delta)]\frac{dk^*}{d\sigma} = 0$$

Dado que $c^* = y^* - i^*$. Se chamarmos o valor de k^* por k_{ouro}, que corresponde ao estoque de capital que maximiza o consumo de estado estacionário c^*, então a condição que determina k_{ouro} é

$$\frac{\partial F(k_{ouro})}{\partial k_{ouro}} = (1+\gamma)(1+\eta) - (1-\delta) \tag{9}$$

Figura 3: Regra de Ouro da Acumulação de Capital



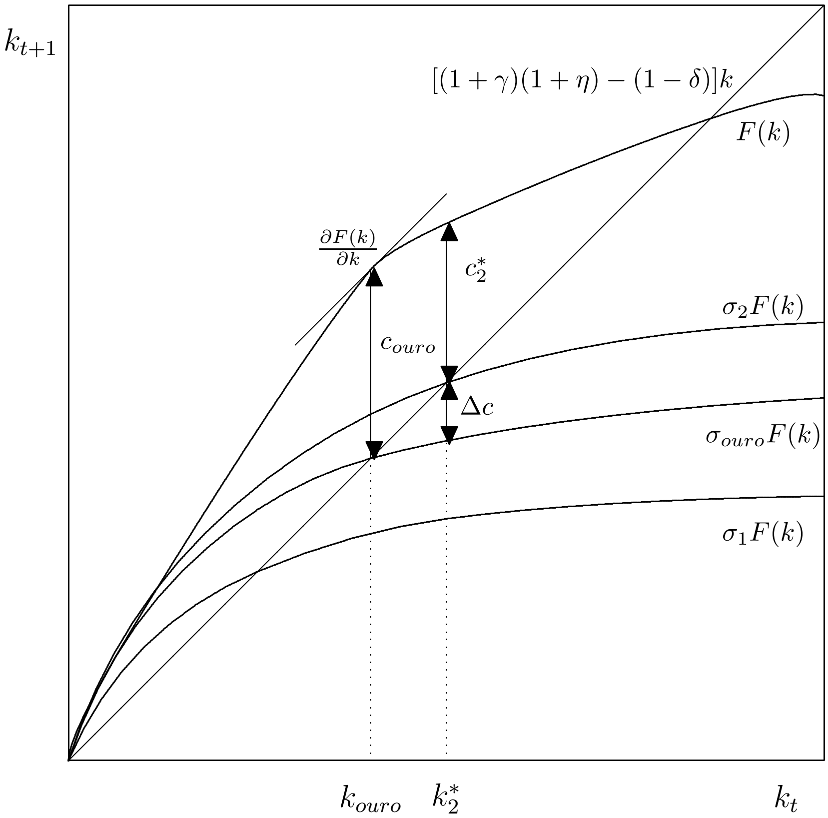
Neste caso, a taxa de poupança correspondente é denominada σ_{ouro}, e o nível associado do consumo por unidades de eficiência no estado estacionário é dado por $c_{ouro} = F(k_{ouro}) - [(1+\gamma)(1+\eta) - (1-\delta)]k_{ouro}$.

A condição da equação (9) é chamada a *regra de ouro da acumulação de capital*, originalmente formulada por Phelps (1966).[7] Na Figura 4 mostramos como funciona a regra de ouro. A figura considera três taxas de poupança possíveis, $\sigma_1, \sigma_{ouro}, \sigma_2$, onde $\sigma_1 < \sigma_{ouro} < \sigma_2$. O consumo por unidade de eficiência, c, é igual a distância vertical entre a função de produção, $F(k)$, e a curva de poupança. Para cada σ, o valor do estoque de capital de estado estacionário corresponde k^* a intersecção entre a curva $\sigma F(k)$ e a reta $[(1+\gamma)(1+\eta) - (1-\delta)]k$. O valor de c^* é maximizado quando $k^* = k_{ouro}$, porque a tangente da função de produção neste ponto é paralela a $[(1+\gamma)(1+\eta) - (1-\delta)]k$. A taxa de poupança que resulta em $k^* = k_{ouro}$ é uma que faz a curva $\sigma F(k)$ cortar a reta $[(1+\gamma)(1+\eta) - (1-\delta)]k$ no valor k_{ouro}.

Quando uma taxa de poupança é melhor do que outra? A resposta direta para esta questão seria endogeinizar esta escolha ao comportamento das famílias, ou seja, seria a utilização do modelo neoclássico de crescimento Cass-Koopmans. Todavia, podemos fazer uma breve análise de estática comparativa para endereçar esta questão. Podemos argumentar que no presente

[7] A fonte deste nome é a bíblica conduta da regra de ouro. ...

Figura 4: A Regra de Ouro e a Ineficiência Dinâmica



contexto que uma taxa de poupança que sempre exceda σ_{ouro} é ineficiente porque maiores quantidades de consumo podem ser obtidas em todos os pontos do tempo através da redução da poupança.

Considere uma economia tal como descrita pela taxa de poupança σ_2 na Figura 4. Neste caso $\sigma_2 > \sigma_{ouro}$, tal que $k_{ouro} > k_2$ e $c_2^* < c_{ouro}$. Imagine que, partindo do estado estacionário, a taxa de poupança é reduzida permanentemente para σ_{ouro}. Neste caso, o consumo por unidade de eficiência aumenta inicialmente em Δc, como descrito na Figura 4. Uma vez que $c_2^* < c_{ouro}$, concluímos que durante a transição para o novo estado estacionário o valor de c sempre será maior do que c_2^*. Portanto, quando $s > s_{ouro}$, a economia está super-poupando, no sentido de que o consumo pode ser aumentado em todos os pontos do tempo pela diminuição da taxa de poupança. Uma economia que poupa em excesso é dita ser *dinamicamente ineficiente*, porque a trajetória do consumo por unidades de eficiência permanece abaixo de trajetórias alternativas em todos os pontos do tempo.

Se $\sigma_1 < \sigma_{ouro}$, como na Figura 4 então o montante do consumo por unidades de eficiência de estado estacionário pode ser aumentado por meio de um aumento da taxa de poupança. Todavia, deve se notar que o aumento da poupança pode diminuir c ao invés de aumentá-lo durante o período de transição. O resultado final depende por tanto do valor que os indivíduos dão ao consumo ao longo do tempo, questão esta que apenas pode ser endereçada com o modelo de crescimento Cass-Koopmans.

2 Resíduo de Solow

Anteriormente vimos que a taxa de crescimento de longo prazo de uma economia é determinada pela taxa de crescimento da produtividade. Este resultado é comum a outros modelos onde a decisão de poupar é tomada de forma endógena mas que preservam as outras hipóteses do Modelo de Solow, de fato podemos dizer que esta é uma conclusão comum a teoria neoclássica do crescimento econômico, da qual o Modelo de Solow é o grande inspirador. Desta forma podemos afirmar que, para os teóricos neoclássicos, a produtividade é o determinante do desempenho de uma economia no longo prazo. O problema desta conclusão, que também foi obtida por Adam Smith, é que não sabemos como medir a produtividade.

Este é um problema grave, se não podemos medir a produtividade não podemos checar se a Proposição da seção anterior é verdadeira e, portanto, não poderíamos mostrar que o Modelo de Solow está errado, como já foi discutido se não é possível mostrar que um modelo está errado, não devemos utilizar este modelo pois qualquer proposição científica deve poder ser testada. Para resolver o problema da falta de uma medida de produtividade Solow (1957) sugeriu que esta fosse calculada como um resíduo na função de produção.

Se conhecermos o estoque de capital, o que nem sempre é verdade, a mão-de-obra ocupada e o produto de uma economia podemos usar a função de produção para obter o nível de tecnologia, que a partir de agora chamaremos de produtividade total dos fatores. Se considerarmos a função de produção Cobb-Douglas descrita temos que:

$$Y_t = A_t K_t^{\theta} N_t^{1-\theta}$$

A partir da equação podemos determinar a produtividade total dos fatores, A_t, de forma bem simples. Basta isolar A_t na parte esquerda da equação, ou seja:

$$A_t = \frac{Y_t}{K_t^{\theta} N_t^{1-\theta}} \tag{10}$$

uma forma mais elegante, e simples, de calcular a produtividade total dos fatores seria tomar o logaritmo da equação (10), ou seja, fazendo:

$$\ln A_t = \ln Y_t - \theta \ln K_t - (1-\theta)\ln N_t \tag{10'}$$

como em geral estamos interessados na taxa de crescimento de A_t o uso de (10′) é mais recomendado que o de (10).

Note que o cálculo da produtividade toral dos fatores foi feito de forma a que a função de produção fosse observada. Se pensarmos em um contador que deseje fechar o balanço de uma firma a produtividade total dos fatores corresponderia a conta lançada sobre a rubrica de outros, ou seja, o cálculo da produtividade total dos fatores (PTF) é feito de forma residual. Por tratar-se de um residuo e pelo fato do método de cálculo ser devido a Solow é comum chamar a produtividade total dos fatores de Resíduo de Solow.

2.1 Contabilidade do Crescimento

Após estudarmos o Resíduo de Solow podemos caracterizar os três fatores que são responsáveis pelo nível de produto de uma dada economia, são eles: produtividade, capital e trabalho. Também foi visto que, quando a economia encontra-se em uma trajetória de crescimento equilibrado, a taxa de crescimento da produtividade é quem determina o quanto todas as variáveis macroeconômicas vão crescer. Entretanto a maioria das economias são expostas a choques que as retiram, mesmo que por pouco tempo, de sua trajetória de crescimento equilibrado.

Neste caso seria interessante saber a contribuiąo de cada um dos fatores acima para a taxa de crescimento de uma economia. Esta pergunta pode ser respondida por meio de um exercício chamado de Contabilidade do Crescimento.

Definição 3 *A* **Contabilidade do Crescimento** *nos permite determinar o quanto a produtividade, o capital e o trabalho contribuem para a taxa de crescimento de uma determinada economia em um dado período de tempo.*

Uma maneira simples de fazer a contabilidade do crescimento consiste em dividir todos os termos da função de produção descrita na equação (**??**) pela população, L_t, de forma a obter:

$$\frac{Y_t}{L_t} = A_t K_t^{\theta} \frac{N_t^{1-\theta}}{L_t} \tag{11}$$

a equação (11) pode ser escrita da forma:

$$\frac{Y_t}{L_t} = A_t \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\theta} \frac{N_t}{L_t} \tag{11'}$$

onde o termo do lado esquerdo da equação representa o produto *per-capita*, o primeiro termo do lado direito representa a produtividade total dos fatores, o termo entre parênteses representa a relação entre capital e mão de obra, também chamado de intensividade do capital e o terceiro termo representa a percentagem da população empregada ou esforço do trabalho.

A equação (11′) nos mostra que o produto *per-capita* é determinado pela produtividade, pela intensividade do uso do capital e pela proporção de pessoas empregadas. A taxa de crescimento do produto *per-capita* será determinada pela soma da taxa de crescimento de cada um dos três termos descritos acima[8], da forma:

$$\eta_q = \gamma + \eta_k + \eta_n \tag{12}$$

onde η_q representa a taxa de crescimento do produto *per-capita*, γ a taxa de crescimento da produtividade, η_k a taxa de crescimento da relação capital/mão-de-obra e η_n a taxa de crescimento do emprego. Assim como no caso do Resíduo de Solow, conhecidos η_q, η_k e η_n, é possível determinar γ de forma residual.

Uma política de crescimento muito usada na América Latina nas décadas de 50, 60 e 70 era promover a implantação de indústrias intensivas em capital, esta política era inspirada em uma tese da Comissão Econômica para a

[8]Para chegar a este resultado basta derivar a equação (11′) em relação ao tempo e obter a taxa de crescimento do produto *per-capita*.

América Latina (CEPAL) que propunha que tais indústrias agregavam mais valor que as indústrias que não são intensivas em capital. O resultado deste tipo de política é que, via de regra, os países latino-americanos tiveram seus crescimento explicado quase que todo por maior uso do capital. Como já foi visto este tipo de crescimento só é sustentável no curto prazo[9], de forma que a América Latina experimentou um grande crescimento neste período que não mostrou-se sustentável nas décadas de 80 e 90. A Tabela 2 mostra a Contabilidade do Crescimento para alguns países latino-americanos.

Tabela 2: Contabilidade do Crescimento na América Latina

	Cresc. do Prod.			Contribuição do(a):								
				Produtividade			Capital			Trabalho		
País	60s	70s	80s	60s	70s	80s	60s	70s	80s	60s	70s	80s
Argentina	3,5	3,2	-1,7	0,7	0,6	-2,6	2,0	2,0	0,3	0,8	0,6	0,6
Bolívia	6,7	4,5	0,7	3,6	0,8	-0,6	2,0	2,4	-0,2	1,1	1,3	1,5
Brasil	5,9	8,4	1,5	1,5	2,5	-1,4	2,5	3,8	1,7	1,8	2,1	1,3
Chile	4,2	2,7	3,1	1,6	0,5	0,6	1,7	0,8	1,0	0,9	1,5	1,5
Colombia	5,5	5,5	3,2	2,3	2,0	-0,2	1,6	2,0	1,8	1,7	1,5	1,5
Paraguai	4,2	9,5	1,5	0,8	3,6	-3,8	2,0	4,0	3,4	1,4	1,9	1,9
Uruguai	1,7	2,6	-0,2	1,1	1,6	-0,9	0,1	0,9	0,4	0,4	0,1	0,3
Venezuela	6,1	3,0	0,7	3,2	-2,4	- 2,0	1,0	2,6	0,8	1,9	2,9	1,9
Média da A.L.	5,1	4,8	0,6	1,9	0,7	-2,0	2,0	2,5	1,2	1,3	1,6	1,4

Fonte: De Gregório e Lee (1999)

Como pode ser observado na Tabela 2 a experiencia de crescimento na América Latina deveu-se, principalmente, a acumulação de fatores, desta forma, de acordo com o Modelo de Solow, este crescimento não poderia ser sustentado, ou seja, teria de acabar. As colunas referentes aos anos 80 mostram que, neste aspecto, o Modelo de Solow pode explicar o que ocorreu na América Latina e, em particular, no Brasil. Um tópico que será discutido mais adiante diz respeito a razão da queda de produtividade nos anos 80 e 90.

2.2 Convergência

Foi visto que a economia convergirá para seu estado estacionário independentemente das suas condições iniciais, ou seja, o nível de renda de uma

[9] No longo prazo apenas ganhos de produtividade causam crescimento.

determinada economia não depende das riquezas que esta possuia no inicio do pocesso de acumulação. Este resultado decorre da hipótese de rendimentos decrescentes, a medida que uma economia acumula muito capital, o rendimento deste tende a diminuir e, portanto, a remuneração do capital tende a cair, induzindo as pessoas a acumular menos capital, ou seja, investir menos. Por outro lado, em uma economia com pouco capital o efeito contrário deve ocorrer, qual seja, o rendimento do capital deve ser alto de forma a induzir as pessoas a acumular muito capital, ou seja, investir muito. Desta forma, a medida que uma economia torna-se mais rica, sua taxa de crescimento, em unidades de eficiência, torna-se menor.

Este resultado levou alguns economistas a estudar uma hipótese conhecida como convergência entre a renda dos países. Segundo esta hipótese a taxa de crescimento possui uma relação negativa com a riqueza de um determinado país, de forma que países pobres tendem a apresentar taxas de crescimento maiores que a de países ricos. No extremo esta hipótese corresponde a dizer que, no longo prazo, a renda de todos os países deverá se igualar.

Definição 4 *A* **Hipótese da Convergência** *diz que a taxa de crescimento de uma economia relaciona-se de forma inversa com a renda, de forma que, no longo prazo, a renda de todos os países converge para o mesmo valor.*

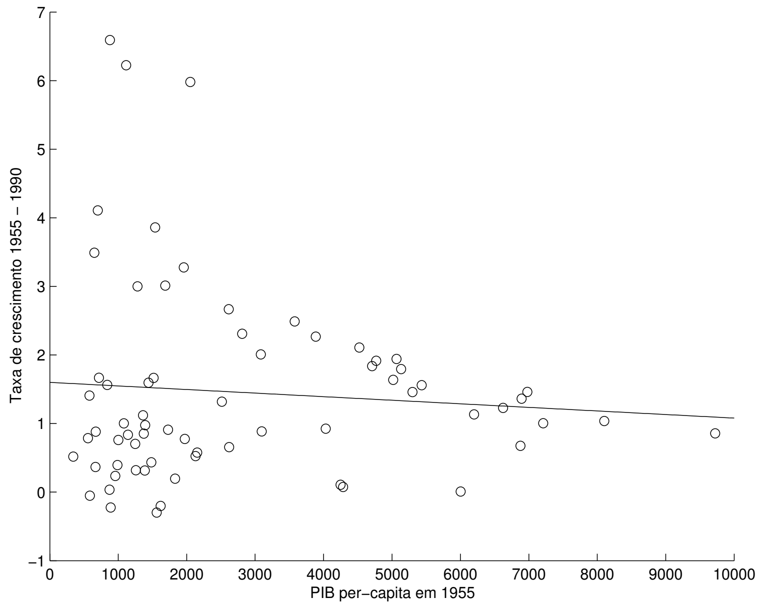
Este resultado, que decorre do Modelo de Solow, provocou um grande debate entre os economistas, de fato, o desenvolvimento deste debate foi quem, de certa forma, guiou o desenvolvimento das novas teorias do crescimento econômico. O debate se origina em Baumol (1986), neste trabalho o autor usa uma amostra com 16 países para mostrar a existência de convergência. Entretanto, De Long (1988) argumentou que o resultado obtido por Baumol deveu-se a escolha dos países[10], se fosse escolhida uma amostra maior o resultado de convergência não mais seria observado. O resultado de que, para uma amostra grande de países escolhidos ao acaso não existe convergência também foi encontrado por outros economistas e pode ser considerado um fato que deve ser explicado pela teoria do crescimento econômico. A Figura 5 mostra a relação entre a taxa de crescimento e o produto *per-capita* para um conjunto de 68 países no período entre 1955 e 1990, note que não existe nenhuma relação significativa[11] entre a taxa de crescimento e o produto *per-capita*.

Uma maneira de conciliar o resultado obtido por De Long com o obtido por Baumol, foi a hipótese de clubes de convergência, ou ainda, convergência

[10]Baumos apenas considerou países que atualmente são desenvolvidos.

[11]A linha de regressão é praticamente horizontal.

Figura 5: Relação entre Taxa de Crescimento e Riqueza, 1955 - 1990



condicional. Segundo esta idéia apenas países que guardam determinadas características em comum tenderiam a convergir para o mesmo nível de renda *per-capita*. Para entender esta idéia pode ser interessante determinar o estoque de capital do estado estacionário, para isto basta impor a condição de estado estacionário na equação (6), assumindo a função de produção Cobb-Douglas, de forma a obter:

$$(1+\gamma)(1+\eta)k = (1-\delta)k + sk^{\theta}$$

o que implica:

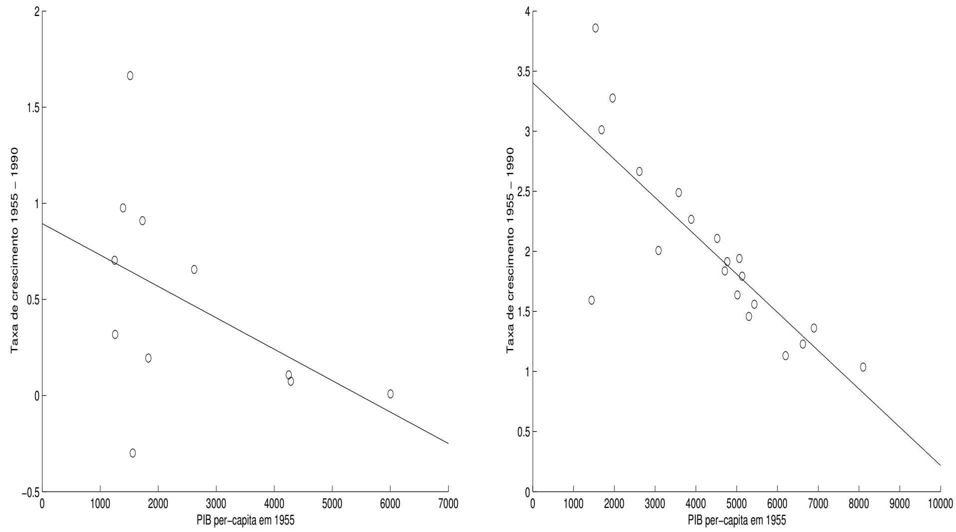
$$k = \left[\frac{s}{(1+\gamma)(1+\eta)-(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{13}$$

de forma que o produto por unidades de eficiência no estado estacionário será dado por:

$$y = \left[\frac{s}{(1+\gamma)(1+\eta)-(1-\delta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{14}$$

Como mostra a equação (14), no estado estacionário, o valor do produto medido em unidades de eficiência é determinado pelos parâmetros do modelo. O tipo de tecnologia utilizada determina os valores da taxa de depreciação, δ, e da participação do capital, α; as preferências das famílias determinam a taxa de poupança; os fatores institucionais determinam a taxa de crescimento da produtividade, γ. A proposta dos clubes de convergência assume que países semelhantes tenderiam a dotar tecnologias semelhnates, possuir taxas de poupanças próximas uma das outras e dispor de sistemas institucionais que permitam o mesmo ritmo de adoção tecnológicas. Ao contrário da hipótese de convergênica, os clubes de convergência não são refutados pelas evidências empíricas.

Figura 6: Clubes de Convergência



(a) América do Sul

(b) Europa

Como pode ser observado nas figuras 6a e 6b existe um claro processo de convergência tanto entre os países da Europa quanto entre os países da América do Sul, de fato, ambas as figuras mostram retas de regressão com forte inclinação negativa. A Figura 6 também mostra que a convergência na Europa ocorre de forma mais velos que na América do Sul.

A proposta dos clubes de convergência tenta resolver o problema empírico da ausência de convergência a partir da idéia de que países diferentes devem ser descritos por parâmetros diferentes, ou seja, as diferenças entre as tecnologias utilizadas e entre as preferências dos agentes determinariam a riqueza de longo prazo da economia, se os países forem muitos diferentes não há porque esperar convergência. Apesar do apelo empírico dos clubes de convergência alguns autores buscaram ir mais além no problema de por que existem países ricos países pobres.

Alguns autores argumentam que a hipótese de rendimentos decrescentes e sua implicaç— ao de as economias convergem para um estadoe stacionário, ou um caminho de crescimento equilibrado, deve ser alterada, nesta linha de pesuisa surge a nova teoria do crescimento econômico, nesta linha Romer (1986) sugere que externalidades associadas ao capital podem explicar a não convergência; Lucas (1988) aponta na direção das externalidades associadas ao capital humano; e, finalmente, Romer (1990) sugere que a solução pode estar na existência de Pesquisa & Desenvolvimento (P & D) e poder de monopólio. Em outra direção Parente e Prescott (2000) sugerem que diferenças na tecnologia adotada pode ser a explicação para a existência de países pobres e países ricos, estes autores argumentam que estas diferenças nas tecnologias adotadas decorrem de diferentes arranjos institucionais. Estas e outras teorias para explicar o crescimento de uma economia serão estudadas nas próximos unidades.

Referências

[1] Barro, Robert J. e Xavier Sala-i-Martin. *Economic Growth.* New York, McGraw-Hill, 1995.

[2] Baumol, William. "Productivity growth, convergence, and welfare: what the long-run data show." *American Economic Review* 76 (5), December, 1986, pp. 1072-1085.

[3] Cass, David. "Optimum growth in a aggregative model of capital accumulation." *Review of Economic Studies*, 32, 1965, pp. 233-240.

[4] De Gregório, José e Jong-Wha Lee. Economic growth in Latin American: sources and prospects. Não-publicado, 1999.

[5] De Long, Bradford. "Productivity growth, convergence, and welfare: comment." *American Economic Review* 78 (5), December, 1988, pp. 1138-1154.

[6] Ellery Jr., Roberto, Victor Gomes e Adolfo Sachsida. "Business cycle fluctuations in Brazil." *Revista Brasileira de Economia*, 56 (2), 2002, pp. 269–307.

[7] Koopmans, Tjalling C. "On the concept of optimal economic growth." In: *The Econometric Approach to Development Planning.* Amsterdam, North-Holland, 1965.

[8] Lucas, Jr., Robert E. "On the mechanics of economic development." *Journal of Monetary Economics*, 1988. Reimpresso em *Lectures on Economic Growth*. Cambridge, Harvard University Press, 2002.

[9] Parente, Stephen e Edward C. Prescott. *Barriers to Riches*. Cambridge, MIT Press, 2000.

[10] Phelps, Edmund S. *Golden Rules of Economic Growth*. New York, Norton, 1966.

[11] Romer, Paul M. "Endogenous technological change." *Journal of Political Economy*, 98 (5), 1990, pp. S71-S102.

[12] Solow, Robert M. "A contribution to the theory of economic growth." *Quarterly Journal of Economics*, February, 1956, pp. 65-94.

[13] Solow, Robert M. "Technical change and the aggregate production function." *Review of Economics and Statistics*, 39, August, 1957, pp. 312-320.